Devoir Maison n°9
Correction

Exercice 1

Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(x(t) = \frac{1}{1-t^2},\ y(t) = \frac{t^3}{1-t^2} \right).$$

1. Étude de $\mathcal{C}$:

a. La courbe $\mathcal{C}$ est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Les fonctions x et y sont respectivement paires et impaires sur D, donc la courbe admet pour axe de symétrie la droite (Ox) et il suffit de l'étudier sur $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

b. Les fonctions x et y sont dérivables sur I :

$$x'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}.$$

D'où le tableau de variations :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	‖		$+$		
$x(t)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0
$y'(t)$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$

c. Le seul point stationnaire est en $t = 0$. Or, on a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{t'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{t(3-t^2)}{2} = 0,$$

ce qui nous donne une tangente horizontale et, du fait de la symétrie, il s'agit nécessairement d'un point de rebroussement de première espèce.

d. Asymptotes :

- Quand $t \to +\infty$, la droite (Oy) est asymptote.
- Quand $t \to 1$, on pose $t = 1 + h$ et on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = x(1+h) = -\dfrac{1}{2h} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{h}{8} + o(h) \\ y(t) = y(1+h) = -\dfrac{1}{2h} - \dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{8}h + o(h) \end{cases}$$

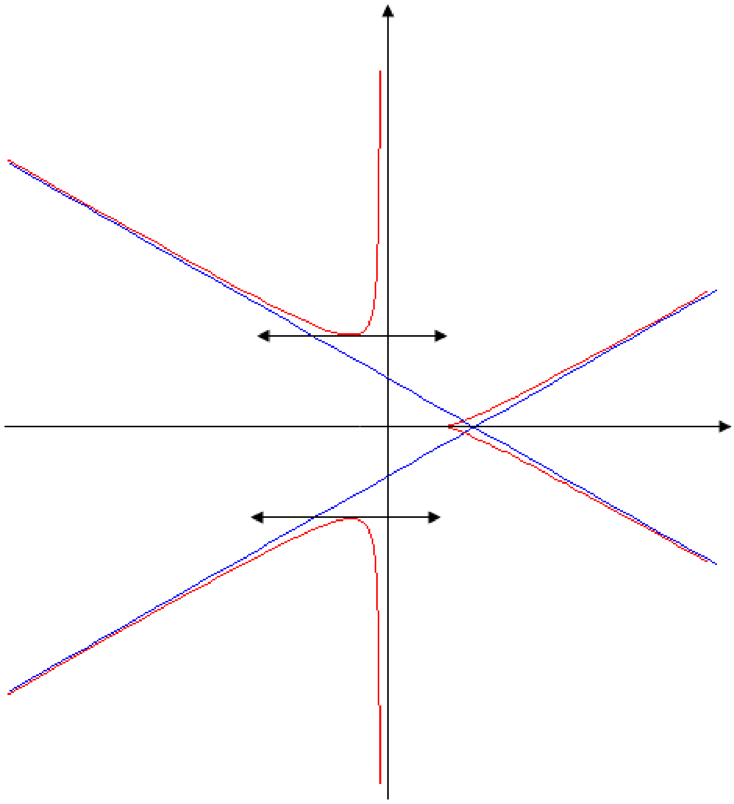
donc on a :

$$y(1+h) = x(1+h) - \frac{3}{2} - \frac{3}{4}h + o(h).$$

On en déduit que la droite Δ d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe et qu'elle se trouve sous la courbe quand $t \to 1^-$ et au dessus quand $t \to 1^+$.

e. On a une tangente horizontale au point $M(\sqrt{3})\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ et, par symétrie, en $M(-\sqrt{3})\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

2. Tracé de la courbe $\mathcal{C}$:



Exercice 2

Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t - 2t, \sin t)\,.$$

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $x'(t) = -\sin t - 2 \neq 0$, donc $\overrightarrow{f}'(t) \neq \overrightarrow{0}$, ce qui implique que la courbe $\mathcal{C}$ est régulière.

2. On remarque que :

$$x(t+2\pi) = x(t) - 4\pi \quad \text{et} \quad y(t+2\pi) = y(t),$$

ce qui implique que la courbe est invariante par les translations de vecteurs $4\pi\,\overrightarrow{i}$.
Il suffira donc d'étudier la courbe sur un intervalle de la forme $[a, a+2\pi]$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{f}(t) + \overrightarrow{f}(\pi - t)}{2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos t - 2t \\ \sin t\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos(\pi - t) - 2(\pi - t) \\ \sin(\pi - t)\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos t - 2t - \cos t - 2\pi + 2t \\ \sin t + \sin t\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}-\pi \\ \sin t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, le milieu du segment $[M(t), M(\pi - t)]$ est le point de la droite d'équation $x = -\pi$ qui a la même abscisse que les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$, donc la courbe est bien symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\pi$.

Il suffit alors de prendre $a = -\dfrac{\pi}{2}$ pour obtenir la réduction de l'intervalle d'étude à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car :

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - t \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

Le reste de la courbe se déduit ensuite de cette restriction par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = -\pi$, puis par les translations de vecteurs $4k\pi\,\overrightarrow{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

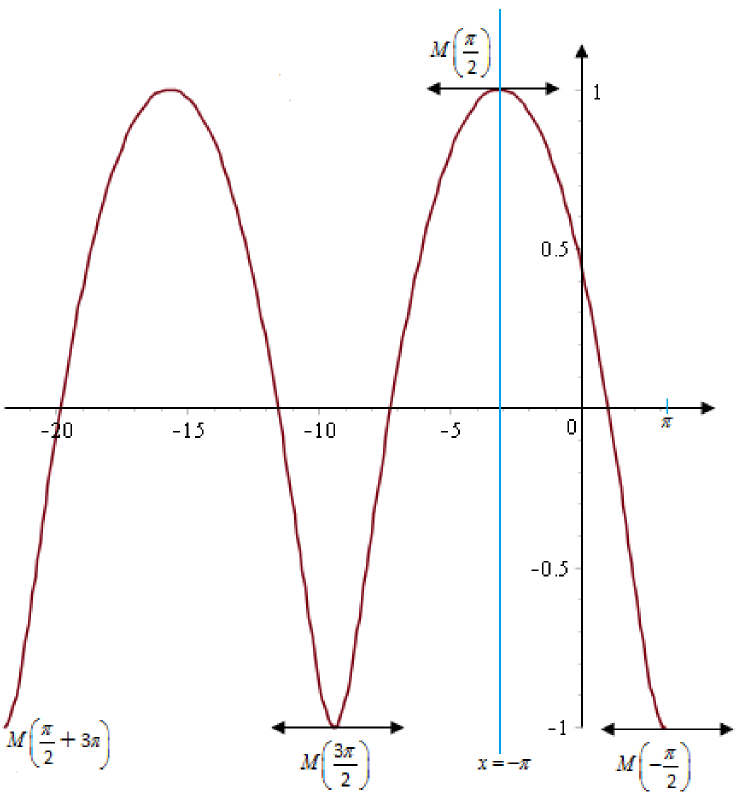
4. Pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$x'(t) = -\sin t - 2 \quad \text{et} \quad y'(t) = \cos t.$$

D'où le tableau de variations :

t	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$-$	
$x(t)$	π	$\searrow$	$-\pi$
$y'(t)$	0	$+$	0
$y(t)$	-1	$\nearrow$	1

5. Tracé de la courbe $\mathcal{C}$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + 3\pi\right]$:



6. Un point est birégulier si, et seulement si :

$$det(f'(t), f''(t)) = \begin{vmatrix} -\sin t - 2 & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = 1 + 2\sin t \neq 0.$$

On en déduit que les points biréguliers de $\mathcal{C}$ sont les points $M(t)$ pour $t \in D' = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, 7\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

7. La développée de la courbe $\mathcal{C}$ est l'enveloppe de ses normales (que l'on notera N_t).
Or on a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in N_t &= \overrightarrow{M(t)M}.\overrightarrow{f'}(t) = 0 \\ &= \begin{pmatrix} x - (\cos t - 2t) \\ y - \sin t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\sin t - 2 \\ \cos t \end{pmatrix} = 0 \\ &= -(2 + \sin t)x + y\cos t = 2t \sin t - 2\cos t + 4t \end{aligned}$$

On obtient alors la développée :

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= -\frac{2(\cos t \sin t + 2\cos t - 2t\sin t + t)}{1 + 2\sin t} \\ y(t) &= -\frac{2(6\sin t + 5 + \sin^2 t)}{1 + 2\sin t} \end{aligned} \right. , \; t \in D'.$$