Devoir Maison n°7
Correction

1. Les fonction $x : t \mapsto x(t) = \dfrac{t.ch(t) - sh(t)}{ch(t)}$ et $y : t \mapsto y(t) = \dfrac{1}{ch(t)}$ sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

De plus, x est impaire et y est paire, donc la courbe C est symétrique par rapport à l'axe Oy et on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
Pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{cases} x'(t) = th^2(t) \geqslant 0 \\ y'(t) = -\dfrac{sh(t)}{ch^2(t)} \leqslant 0 \end{cases},$$

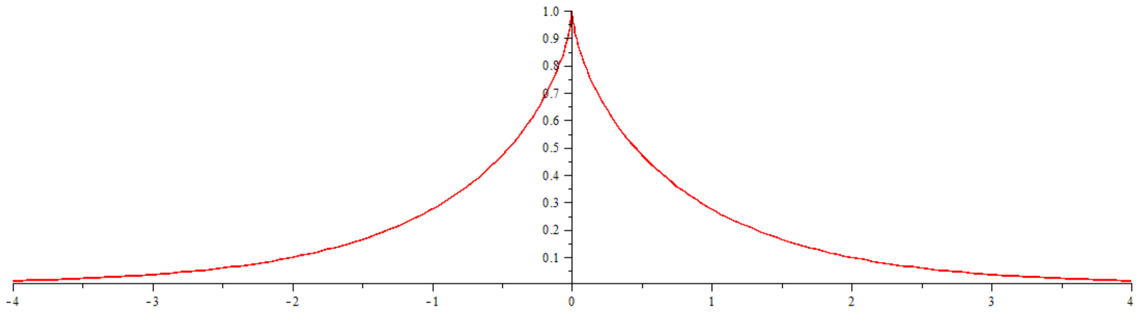
et on en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	-	
y	1	$\searrow$	0

L'axe Ox est donc asymptote à la courbe quand $t \to +\infty$, la courbe étant au-dessus.
Le point $M(0)$ est stationnaire et :

$$\begin{cases} x''(t) = 2th(t)(1 - th^2(t)) \\ y''(t) = \dfrac{2ch(t)sh^2(t) - ch^3(t)}{ch^4(t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \end{cases},$$

donc la tangent à C en $M(0)$ est verticale.
On obtient alors :



2. En remarquant que l'on a :

$$(x'(t), y'(t)) = \left(\frac{sh^2(t)}{ch^2(t)}, -\frac{sh(t)}{ch^2(t)}\right) = \frac{sh(t)}{ch^2(t)}(sh(t), -1),$$

on en déduit que le vecteur de coordonnées $(sh(t), -1)$ dirige la tangente en tout point, y compris en $M(0)$.
On a alors :

$$\Delta : \begin{vmatrix} x - t + th(t) & -sh(t) \\ y - \dfrac{1}{ch(t)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y.sh(t) - t = 0.$$

3. Le point $A(t)$ a pour coordonnées $(t, 0)$, donc le vecteur $\overrightarrow{M(t)A(t)}$ a pour coordonnées $\left(th(t), \dfrac{-1}{ch(t)}\right)$, ce qui donne :

$$M(t)A(t) = \sqrt{th^2(t) + \frac{1}{ch^2(t)}} = 1.$$

4. La fonction φ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est de plus impaire, donc la courbe représentant φ est symétrique par rapport à l'origine du repère O et on peut encore réduire le domaine d'étude à l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
Pour tout $t \in I$, on a :

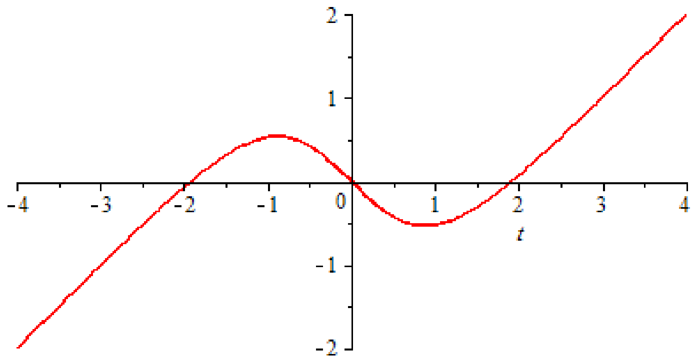
$$\varphi'(t) = \frac{ch^2(t) - 2}{ch^2(t)},$$

qui est du signe de $ch^2(t) - 2$.
Or, la fonction ch induisant une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$, il existe un unique réel positif t_0 tel que $ch(t_0) = \sqrt{2}$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		t_0		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	β_0	$\nearrow$	$+\infty$

avec $t_0 \approx 0,88$ et $\beta_0 \approx -0,53$.

Graphe de φ :



5. a. En remarquant que $x^2 + y^2 - 2\alpha x = 1 - \alpha^2 \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + y^2 = 1$, on en déduit que $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ est la famille des cercles centrés sur Ox et de rayons 1. On notera $\Omega(\alpha, 0)$ les centres de ces cercles.

b. Il existe un point $M(t)$ de C sur Γ_α si, et seulement si :

$$\begin{aligned}
(t - th(t) - \alpha)^2 + \frac{1}{ch^2(t)} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (t-\alpha)^2 - 2th(t)(t-\alpha) + th^2(t) + (1 - th^2(t)) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-\alpha)^2 - 2th(t)(t-\alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-\alpha)(t - \alpha - 2th(t)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-\alpha)(\varphi(t) - \alpha) = 0.
\end{aligned}$$

On a donc toujours la solution $t = \alpha$, plus la ou les solutions de $\varphi(t) = \alpha$.
Il y aura donc exactement deux solutions si, et seulement si, l'équation $\varphi(t) = \alpha$ admet une unique solution.
L'étude précédente de la fonction φ nous donne alors immédiatement l'existence et l'unicité du nombre réel $\alpha_0 = |\beta_0| \approx 0,53$ tel que, si $|\alpha| > \alpha_0$, alors l'intersection de C avec Γ_α se réduit à deux points.

c. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a vu que les tangentes à C en $M(\alpha)$ sont les droites $\Delta : x + y.sh(\alpha) - \alpha = 0$, qui passent par les points $\Omega(\alpha, 0)$.
De plus, on a vu à la question 3 que $M(\alpha)A(\alpha) = 1$, ce qui implique que le point $M(\alpha)$ appartient au cercle Γ_α puisque $A(\alpha) = \Omega(\alpha, 0)$.
Or, tout rayon $[\Omega, M]$ d'un cercle et orthogonal à la tangente au cercle en M, donc on en déduit immédiatement que les tangentes à Γ_α et à C sont orthogonales en leur intersection $M(\alpha)$.
Visualisons tout ceci sur un schéma :