– Devoir Maison n°6 –

Partie 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ **continue et bornée**. Pour tout réel $s > 0$, on pose :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. a. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer l'intégrale généralisée $F(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie.

2. On considère un réel u, et deux réels positifs a et b, tels que $a < b$. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$f(t) = u \quad \text{si } a \leq t \leq b, \text{ et } \quad f(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Que vaut $F(s)$ dans ce cas ?

3. Dans cette question uniquement, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 1$.
On suppose aussi, dans cette question uniquement que f est définie par :

$$f(t) = (-1)^n u_n \quad \text{si } n \leq t < n+1, \text{ pour tout entier naturel, } n, \quad \text{et } \ f(t) = 0 \quad \text{si } \ t < 0.$$

a. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\int_0^N e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1 - e^{-s}}{s} \sum_{n=0}^{N-1} \left((-1)^n u_n e^{-sn}\right).$$

b. Montrer que la série de terme général $(-1)^n u_n e^{-sn}$ converge.

c. En déduire que $F(s)$ peut s'écrire comme somme d'une série, dont on donnera l'expression du terme général en fonction du réel s.

Partie 2

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. On désignera par x_1 et x_2 ses racines, avec $x_1 < x_2$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ privé de x_1 et x_2.

3. Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit de deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^n$. Cette dérivée $n^{\text{ième}}$ est notée $(u\,v)^{(n)}$.

4. On suppose, uniquement dans cette question, $n = 2$.
En utilisant la relation $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$:

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x+1)f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

5. On pose, pour tout entier naturel p : $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

a. Que valent a_0 et a_1 ?

b. On suppose, uniquement dans cette question, $p \geq 2$. Montrer que : $a_p = a_{p-1} + a_{p-2}$.

c. En remarquant que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2, exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 2$, a_p en fonction de p, x_1 et x_2.

6. Exprimer, en utilisant la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

7. a. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}.$$

b. Exprimer, en fonction de x_1 et x_2, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{b}{x-x_2}$.

c. Retrouver alors le résultat du **5c**.

Partie 3

1. a. Soit $x \in]0,1[$. que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$?

b. En déduire, pour tout réel $y > 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{y^n} = \frac{1}{y-2+\dfrac{1}{y}}.$$

2. On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_0 = 0, w_1 = 1, \text{ et, pour tout entier naturel } n \geq 2,\ w_n = w_{n-1} + w_{n-2}.$$

a. Exprimer, pour tout entier naturel $n \geq 2$, w_n en fonction de n.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

b. Montrer que, pour des valeurs du réel x convenables :

$$(1-x-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x.$$

c. En déduire, pour des valeurs du réel y que l'on précisera :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} = \frac{1}{y-1-\dfrac{1}{y}}.$$