Devoir Maison n°5
Correction

Exercice 1

1. a. On écrit d'une part que :
$$BAB - \lambda B = B(AB - \lambda I)$$
et donc :
$$\det(BAB - \lambda I) = \det(B)\chi_{AB}(\lambda).$$
En écrivant d'autre part que :
$$BAB - \lambda I = (BA - \lambda I)B,$$
on obtient cette fois que :
$$\det(BAB - \lambda I) = \chi_{BA}(\lambda)\det(B).$$
On peut simplifier par $\det(B)$ qui est non-nul et on trouve que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
On a ainsi montré que AB et BA ont bien le même polynôme caractéristique.

b. Soit $x \in E_\lambda(f \circ g)$, c'est-à-dire que $f \circ g(x) = \lambda x$. On a :
$$g \circ f\big(g(x)\big) = g\big(f \circ g(x)\big) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$
Ceci prouve que $g(x) \in E_\lambda(g \circ f)$, et donc que $g(E_\lambda(f \circ g)) \subset E_\lambda(g \circ f)$.
Par symétrie des rôles joués par f et g, on a aussi $f(E_\lambda(g \circ f)) \subset E_\lambda(f \circ g)$.

c. f et g étant des isomorphismes, ils conservent la dimension, et on a donc :
$$\dim(g(E_\lambda(f \circ g))) = \dim(E_\lambda(f \circ g)) \text{ et } \dim(f(E_\lambda(g \circ f))) = \dim(E_\lambda(g \circ f)).$$
D'autre part, les inclusions démontrées à la question précédente prouvent que
$$\dim(g(E_\lambda(f \circ g))) \leq \dim(E_\lambda(g \circ f)) \text{ et } \dim(f(E_\lambda(g \circ f))) \leq \dim(E_\lambda(f \circ g)).$$
Si on met tout ensemble, on en déduit que :
$$\dim(E_\lambda(f \circ g)) \leq \dim(E_\lambda(g \circ f)) \text{ et } \dim(E_\lambda(g \circ f)) \leq \dim(E_\lambda(f \circ g)).$$
Ainsi, les espaces propres $E_\lambda(f \circ g)$ et F_λ ont même dimension.

d. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f \circ g$. Alors, puisque $f \circ g$ est diagonalisable, on a :
$$\dim(E_{\lambda_1}(f \circ g)) + \cdots + \dim(E_{\lambda_p}(f \circ g)) = n.$$
D'après le résultat de la question précédente, on a aussi :
$$\dim(E_{\lambda_1}(g \circ f)) + \cdots + \dim(E_{\lambda_p}(g \circ f)) = n.$$
Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g \circ f$ est (au moins) égale à n.
C'est bien que $g \circ f$ est diagonalisable.

2. a. Si 0 est valeur propre de $f \circ g$, alors $\det(AB) = 0$. Mais $\det(AB) = \det(BA) = 0$, et donc 0 est valeur propre de $g \circ f$.

b. On utilise la relation suivante :
$$(AB - \alpha I)C = I \implies ABC = I + \alpha C.$$
En développant, on trouve :
$$\begin{aligned}(BA - \alpha I)(BCA - I) &= B(ABC)A - BA - \alpha BCA + \alpha I\\ &= BA + \alpha BCA - BA - \alpha BCA + \alpha I\\ &= \alpha I.\end{aligned}$$

On en déduit que $\det(BA - \alpha I)$ est non-nul, puisque l'on a :

$$\det(BA - \alpha I) \times \det(BCA - I) = \alpha^n \neq 0,$$

et donc que $BA - \alpha I$ est inversible.

c. On raisonne par contraposée. Si α n'est pas une valeur propre de $f \circ g$, alors $AB - \alpha I$ est inversible, et par la question précédente, $BA - \alpha I$ est inversible, c'est-à-dire que α n'est pas une valeur propre de $g \circ f$. Par contraposée, toute valeur propre de $g \circ f$ est une valeur propre de $f \circ g$.
Par symétrie du rôle joué par f et g, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

d. On va travailler en dimension 2, avec des matrices non-inversibles. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice BA est diagonalisable (elle est même diagonale), tandis que AB ne l'est pas puisque :

$$\chi_{AB} = X^2 \Rightarrow Sp(AB) = \{0\},$$

alors que :

$$rg(AB) = 1 \Rightarrow din(E_0) = dim(Ker(AB)) = 1 \neq 2.$$

Exercice 2

1. On vérifie sans difficulté que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur E.

2. Puisque H est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est le noyau d'une forme linéaire), sa dimension est 3.
Pour trouver une base de H, il suffit de trouver trois vecteurs indépendants.
Posons par exemple $R_1(X) = X - 1$, $R_2(X) = X^2 - X$ et $R_3(X) = X^3 - X^2$. (R_1, R_2, R_3) est une famille de 3 éléments de H, qui est libre car les degrés respectifs des R_i sont distincts. On a donc bien une base de l'hyperplan.
Il est possible aussi de déterminer une base de l'hyperplan comme on le fait usuellement quand on connait l'équation d'un sous-espace vectoriel.
Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a donc :

$$P \in H \iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \iff \left\{ \begin{array}{lclll} a_0 & = & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & = & a_1 & & \\ a_2 & = & & a_2 & \\ a_3 & = & & & a_3. \end{array} \right.$$

Cette méthode donne comme base $(X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1)$.

3. Il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir de l'une des bases construites à la question précédente.
On a donc :

$$P_1 = \frac{R_1}{\|R_1\|} = \sqrt{\frac{1}{2}}(X - 1).$$

Posons $P_2' = R_2 + \lambda P_1$, avec λ de sorte que $(P_2', P_1) = 0$, ce qui entraîne $\lambda = -(P_1, R_2)$.
Après normalisation, on trouve :

$$P_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (X + 1)/2).$$

On procède de même pour P_3, et on trouve :

$$P_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(X^2 - (X^2 + X + 1)/3\right).$$

4. On a :

$$P_H(X) = \sum_{j=1}^{3}(X, P_j)P_j = \frac{-1}{4}\left(X^3 + X^2 - 3X + 1\right).$$

Il vient :

$$d^2(X, H) = \|X\|^2 - \|P_H(X)\|^2 = 1 - 3/4 = 1/4.$$