⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 1 - S1 - Analyse

vendredi 07 octobre 2016 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\, dt$$

1. Montrer que l'intégrale I converge.

2. Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\frac{u^2}{1+u^4} = \frac{au+b}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{cu+d}{u^2+\sqrt{2}u+1}.$$

3. Déterminer la valeur de I à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\tan t}$.

Exercice 2

On considère une fonction $f \in C^0([0,1])$.

1. Montrer que :

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx.$$

Indication : on pourra calculer la différence des deux intégrales en posant $t = \frac{\pi}{2} - x$.

2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de :

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\, dx.$$

Indication : on pourra montrer que I_n s'écrit sous la forme λJ_n avec $J_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\, dx$, puis que $J_n = K_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\, dx$.

Fin de l'énoncé d'analyse