Corrigé de la séance de révision n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1

Vu les notations du début de problème, les espaces considérés ici sont réels.

1. Soit $x \in E$. On a $x \in \operatorname{Ker}(u) \Rightarrow u(x) = 0_F \Rightarrow v(x) = w\big(u(x)\big) = w(0_F) = 0_G \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(v)$.

2.(a) On choisit une base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Ker}(u)$ (qui est de dimension $n-p$). Comme c'est une famille libre de E, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E d'après le théorème de la base incomplète.

D'après le théorème du rang on a $\dim \operatorname{Im}(u) = \dim E - \dim \operatorname{Ker}(u) = n - (n-p) = p$.

2.(b) La famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille de $p = \dim \operatorname{Im}(u)$ vecteurs appartenant à $\operatorname{Im}(u)$, il suffit donc de démontrer qu'elle est libre ou génératrice.

▸ *1re méthode* : montrons qu'elle est libre. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p = 0_F$. On a

$$0_F = \alpha_1 u(e_1) + \dots + \alpha_p u(e_p) = u\big(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p\big) \implies \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p \in \operatorname{Ker}(u)$$

d'où l'existence de $n-p$ réels $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p = \alpha_{p+1} e_{p+1} + \dots + \alpha_n e_n$. Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, tous les α_i sont nuls, comme souhaité.

▸ *2de méthode* : montrons qu'elle est génératrice. Pour tout $y \in \operatorname{Im}(u)$ il existe un élément $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On décompose x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E en $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, et alors

$$y = u(x) = \alpha_1 u(e_1) + \dots + \alpha_p u(e_p) + \underbrace{\alpha_{p+1} u(e_{p+1}) + \dots + \alpha_n u(e_n)}_{=0_F} = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p\,,$$

ce qui montre que $(f_1, \dots, f_p)$ engendre $\operatorname{Im}(u)$.

2.(c) D'abord w est bien défini comme élément de $\mathcal{L}(F, G)$ d'après le théorème de détermination d'une application linéaire. Puis on vérifie que les deux éléments v et $w \circ u$ de $\mathcal{L}(E, G)$ coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E :

□ Si $i \in \{p+1, \dots, n\}$ on a $e_i \in \operatorname{Ker}(u)$ donc $u(e_i) = 0_F$ d'où $w \circ u(e_i) = 0_G$ mais aussi $e_i \in \operatorname{Ker}(v)$ (d'après l'hypothèse) donc $v(e_i) = 0_G$.

□ Si $i \in \{1, \dots, p\}$ on a $u(e_i) = f_i$ donc $w \circ u(e_i) = w(f_i) = v(e_i)$ par construction de w.

Ainsi v et $w \circ u$ coïncident sur une base de E donc ils sont égaux.

Exercice 2

1.(a) Composons par f_j à droite (par exemple) l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i = id_E$. On obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i \circ f_j = f_j$ et comme $f_i \circ f_j = \omega$ lorsque $i \neq j$, il reste $f_j \circ f_j = f_j$ ce qui prouve que f_j est un projecteur de E. On retient que

$$\forall\, (i,j) \in \{1, \dots, k\}^2\,, \quad \boxed{f_i \circ f_j = \delta_{i,j}\, f_j}\,.$$

1.(b) C'est un résultat valable pour tout projecteur :

• Montrons que $\operatorname{Ker}(f_j - I_d) \subset \operatorname{Im}(f_j)$:

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f_j - I_d)$, on a $(f_j - I_d)(x) = 0_E$ donc $f_j(x) - x = 0_E$ d'où $x = f_j(x) \in \operatorname{Im}(f_j)$.

• Montrons que $\operatorname{Im}(f_j) \subset \operatorname{Ker}(f_j - I_d)$:

Soit $x \in \operatorname{Im}(f_j)$. $\exists\, y \in E\,,\ x = f_j(y)$. On a donc $f_j(x) = (f_j \circ f_j)(y) = f_j(y) = x$ donc $(f_j - I_d)(x) = 0_E$ d'où $x \in \operatorname{Ker}(f_j - I_d)$.

2. Considérons des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k \underset{(1)}{=} \omega$, et montrons que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

Soit $j \in \{1, \dots, k\}$, on compose (1) par f_j (par exemple à droite), il vient $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i \circ f_j = \omega$ et puisque $f_i \circ f_j = \delta_{i,j}\, f_j$, il ne reste que $\alpha_j f_j = \omega$ d'où $\alpha_j = 0$ car l'énoncé impose f_j non nul. Ceci vaut pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, d'où le résultat.

La famille $(f_1, \dots, f_k)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ donc son cardinal est inférieur ou égal à $\dim(\mathcal{L}(E))$, c'est-à-dire $\boxed{k \leqslant n^2}$.

3. (a) Soit $j \in \{1, \dots, k\}$ et $x \in G_j$. D'après la question 1.(a), on a $\mathrm{Im}(f_j) = \mathrm{Ker}(f_j - id_E)$ donc $x = f_j(x)$. Ainsi,

$$f_i(x) = f_i(f_j(x)) = (f_i \circ f_j)(x) = \delta_{i,j}\, f_j(x) = \delta_{i,j}\, x\,.$$

3. (b) Montrons l'existence et l'unicité d'une telle décomposition.

• Existence : pour $x \in E$, appliquons à x la relation $id_E = f_1 + \dots + f_k$. On obtient $x = f_1(x) + \dots + f_k(x)$ et il suffit de poser $\boxed{x_j = f_j(x)}$ et de constater qu'on a bien $x_j \in \mathrm{Im}(f_j) = G_j$.

• Unicité : soit $x \in E$. Supposons qu'on ait deux décompositions $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} y_j$ avec $x_j \in G_j$ et $y_j \in G_j$ pour tout j. On applique alors f_i à l'égalité précédente, on obtient

$$\sum_{j=1}^{k} f_i(x_j) = \sum_{j=1}^{k} f_i(y_j)\,.$$

Or d'après la question précédente on a $f_i(x_j) = \delta_{i,j}\, x_j$ et aussi $f_i(y_j) = \delta_{i,j}\, y_j$, il reste donc $x_i = y_i$. C'est valable pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, donc les deux décompositions sont bien identiques.

3. (c) Choisissons, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, un vecteur non nul $x_j \in G_j$ (c'est possible car $G_j \neq \{0_E\}$ puisque $f_j \neq \omega$). Montrons alors que la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est libre dans E.

En effet, si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont k réels tels que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0_E = 0_E + \dots + 0_E$, alors l'unicité de la décomposition prouvée à la question précédente montre que $\forall\, j$, $\alpha_j\, x_j = 0_E$, et puisque $x_j \neq 0_E$, c'est que $\alpha_j = 0$ comme voulu.

Ainsi $(x_1, \dots, x_k)$ est libre dans E donc son cardinal est inférieur ou égal à $\dim(E)$, c'est-à-dire $k \leqslant n$.

4. (a) En utilisant la distributivité de $\circ$ par rapport à $+$ dans $\mathcal{L}(E)$,

$$f \circ f = \left(\sum_{j=1}^{k} a_j f_j\right) \circ \left(\sum_{i=1}^{k} a_i f_i\right) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} a_j\, a_i\, f_j \circ f_i = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} a_j\, a_i\, \delta_{i,j}\, f_j \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{f \circ f = \sum_{j=1}^{k} a_j^2\, f_j}.$$

4. (b) • Cherchons une CNS pour que f soit un projecteur.

$$\begin{aligned} f \circ f = f \iff & \sum_{j=1}^{k} a_j^2\, f_j = \sum_{j=1}^{k} a_j\, f_j \iff \sum_{j=1}^{k} (a_j^2 - a_j)\, f_j = \omega \\ \iff & \forall\, j \in \{1, \dots, k\}, \quad a_j^2 - a_j = 0 \qquad \text{car } (f_1, \dots, f_k) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(E). \\ \iff & \boxed{\forall\, j \in \{1, \dots, k\}, \quad a_j \in \{0, 1\}}. \end{aligned}$$

• La condition précédente étant remplie, notons $I_0 = \big\{i \in \{1, \dots, k\}\,,\, a_i = 0\big\}$ et $I_1 = \big\{i \in \{1, \dots, k\}\,,\, a_i = 1\big\}$.

Avec ces notations, montrons que $\mathrm{Ker}\, f = \displaystyle\sum_{i \in I_0} G_i$ et $\mathrm{Im}\, f = \displaystyle\sum_{i \in I_1} G_i$. Soit $x \in E$. Écrivons $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i$ avec $\forall\, i$, $x_i \in G_i$. On a

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} a_j\, \underbrace{f_j(x_i)}_{=\,\delta_{i,j} x_i} = \sum_{j=1}^{k} a_j\, x_j = \sum_{j \in I_1} x_j$$

Donc

$$x \in \mathrm{Im}(f) \iff x = f(x) \quad (\text{car } f \text{ projecteur}) \iff x = \sum_{j \in I_1} x_j \iff x \in \sum_{j \in I_1} G_j\,.$$

et aussi

$$x\in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x)=0_E \iff \sum_{j\in I_1} x_j = 0_E \iff \forall\, j\in I_1\,,\; x_j=0_E \text{ (unicité)} \iff x=\sum_{j\in I_0} x_j \iff x\in \sum_{j\in I_0} G_j\,.$$

Exercice 3

1.(a) Il est sous-entendu que f est un endomorphisme de E. On calcule $M^2=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}=M$ d'où $f\circ f=f$ donc f est un projecteur de E. On a $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(M)=1$ ou bien, s'agissant d'un projecteur, $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{Tr}(M)=1$.

1.(b) On a $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)=1=\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$ donc il suffit de trouver un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$ et un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$, et les vecteurs e_1+e_2 et e_1-2e_2 font manifestement l'affaire, donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathbb{R}\cdot(e_1+e_2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}\cdot(e_1-2e_2)}.$$

2. Si on note f le projecteur cherché, on doit avoir $f(\varepsilon_1)=0$, $f(\varepsilon_2)=\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3)=\varepsilon_3$.

▸ *1re méthode* : soit $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. On a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-6\neq 0$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de E.

Notons $P=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a la formule de changement de base :

$$[\,f\,]_{\mathcal{B}}=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\times[\,f\,]_{\mathcal{B}'}\times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}=P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} 0&1&2\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}P^{-1}.$$

On obtient $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}=P^{-1}$ en résolvant le système d'inconnues x,y et z suivant :

$$\begin{cases} x+y+2z=a\\ 3x-z=b\\ -x-y=c\end{cases} \iff \begin{cases} x+(-x-c)+2(3x-b)=a\\ z=3x-b\\ y=-x-c\end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{6}(a+2b+c)\\ y=\frac{1}{6}(-a-2b-7c)\\ z=\frac{1}{6}(3a+3c)\end{cases}$$

d'où on tire $P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1&2&1\\-1&-2&-7\\3&0&3\end{pmatrix}$. Finalement,

$$[\,f\,]_{\mathcal{B}}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0&1&2\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&1\\-1&-2&-7\\3&0&3\end{pmatrix}=\boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5&-2&-1\\-3&0&-3\\1&2&7\end{pmatrix}=[\,f\,]_{\mathcal{B}}}.$$

▸ *2de méthode* : si on note $M=[\,f\,]_{\mathcal{B}}$ la matrice cherchée, on doit avoir

$$M\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad M\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

et donc, en notant encore P la même matrice que dans la 1re méthode,

$$MP=\begin{pmatrix} 0&1&2\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} \underset{\det(P)\neq 0}{\Longrightarrow} M=\begin{pmatrix} 0&1&2\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}P^{-1}.$$

On termine comme précédemment par le calcul de P^{-1}.

3. • Montrons que $\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Im}(p)=E$.

Pour $x\in E$, on écrit comme le suggère l'énoncé $x=y+z$ avec $y=x-p(x)$ et $z=p(x)$. On a bien $z\in\mathrm{Im}(p)$ et aussi $y\in\mathrm{Ker}(p)$ car

$$p(y)=p\big(x-p(x)\big)=p(x)-p\big(p(x)\big)\underset{p\circ p=p}{=}p(x)-p(x)=0\,.$$

• D'après le théorème du rang, on a $\dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}(p)\big)=\dim(E)$, ce qui prouve finalement $\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)=E$.

On pouvait aussi se passer du théorème du rang en montrant que $\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Im}(p)=\{0\}$. En effet, si $x\in\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Im}(p)$ on peut écrire $x=p(y)$ avec $y\in E$ et alors

$$0 \underset{x\in\mathrm{Ker}(p)}{=} p(x)=p\big(p(y)\big) \underset{p\circ p=p}{=} p(y)=x\,.$$

4. • q est un projecteur de E car $q\circ q=(I_E-p)\circ(I_E-p)=I_E-2p+p\circ p=I_E-2p+p=q$.

• On se rappelle que pour tout projecteur r, on a $\mathrm{Im}(r)=\mathrm{Ker}(r-I_E)$. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(q)=\mathrm{Ker}(I_E-p)=\boxed{\mathrm{Im}(p)}\quad\text{et}\quad \mathrm{Im}(q)=\mathrm{Ker}(q-I_E)=\boxed{\mathrm{Ker}(p)}.$$

• On a $p\circ q=p-p\circ p=p-p=0_E$ et de même $\boxed{q\circ p=p\circ q=0_E}$.

5.(a) Si $x\in\mathrm{Ker}(p_1)\cap\mathrm{Ker}(p_2)$ alors $p_1(x)=p_2(x)=0$ d'où $q(x)=\underbrace{p_1(x)}_{=0}+\underbrace{p_2(x)}_{=0}-p_2\big(\underbrace{p_1(x)}_{=0}\big)=0$ et donc $x\in\mathrm{Ker}(q)$.

5.(b) On garde à l'esprit que $p_1\circ p_2\neq p_2\circ p_1$ en général. Si on suppose que $p_1\circ p_2=0_E$, alors

$$\begin{aligned}
q\circ q &= (p_1+p_2-p_2\circ p_1)\circ(p_1+p_2-p_2\circ p_1)\\
&= \boxed{p_1\circ p_1}+p_1\circ p_2-p_1\circ p_2\circ p_1+\underline{\underline{p_2\circ p_1}}+\boxed{p_2\circ p_2}-\underline{\underline{p_2\circ p_2\circ p_1}}\cdots\\
&\quad\cdots-\underline{\underline{p_2\circ p_1\circ p_1}}-p_2\circ p_1\circ p_2+p_2\circ p_1\circ p_2\circ p_1\\
&= p_1+p_2+p_2\circ p_1-p_2\circ p_1-p_2\circ p_1\\
&= p_1+p_2-p_2\circ p_1 \;=\; q
\end{aligned}$$

donc q est un projecteur de E.

5.(c) Avec l'hypothèse $p_1\circ p_2=0_E$, si $x\in\mathrm{Ker}(q)$ alors $p_1(x)+p_2(x)-p_2\circ p_1(x)=0\quad(\spadesuit)$.

En appliquant p_1 aux deux membres de ($\spadesuit$), et en utilisant $p_1\circ p_2=0_E$ et $p_1\circ p_1=p_1$, il vient $p_1(x)=0$ puis on reporte dans ($\spadesuit$) ce qui donne $p_2(x)=0$. Finalement on a bien $x\in\mathrm{Ker}(p_1)$ et $x\in\mathrm{Ker}(p_2)$ donc $x\in\mathrm{Ker}(p_1)\cap\mathrm{Ker}(p_2)$ et l'égalité des ensembles est démontrée par double inclusion.

Exercice 4

1. Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel possède un supplémentaire. On a $\dim\big(\mathrm{Vect}(u)\big)+\dim(H_u)=\dim(E)$ donc $\boxed{\dim(H_u)=n-1}$.

2. Soit p_u le projecteur sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à H_u. On a $f\circ p_u=p_u\circ f$ donc

$$f(u)=f\big(p_u(u)\big)=p_u\big(f(u)\big)\in\mathrm{Vect}(u)$$

d'où l'existence du réel λ_u cherché.

3. Notons $w=u+v$. Par le même raisonnement qu'à la question précédente (w n'est pas nul sinon (u,v) serait liée), il existe un réel λ_w tel que $f(w)=\lambda_w w$. Ainsi,

$$\lambda_w(u+v)=\lambda_w w=f(w)=f(u+v)=f(u)+f(v)=\lambda_u u+\lambda_v v$$

d'où on tire la relation de liaison $(\lambda_w-\lambda_u)u+(\lambda_w-\lambda_v)v=0$ et puisque (u,v) est supposée libre, c'est que $\lambda_w-\lambda_u=0=\lambda_w-\lambda_v$ donc $\lambda_u=\lambda_v$.

4. Écrivons $v=\alpha u$ avec $\alpha\neq 0$. On a d'une part $f(v)=f(\alpha u)=\alpha f(u)=\alpha\lambda_u u$, et d'autre part $f(v)=\lambda_v v=\lambda_v\alpha u$. Puisque $\alpha\neq 0$ et $u\neq 0$ c'est bien que $\lambda_u=\lambda_v$.

5. Si v n'est pas nul, on a donc dans tous les cas $f(v)=\lambda_u v$ et ceci vaut aussi si v est nul, donc f est l'homothétie de E de rapport λ_u. Réciproquement, toute homothétie commute avec tous les endomorphismes de E.

Le *centre* de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres, est donc l'ensemble des homothéties de E.