Variables aléatoires (corrigé niveau 3).

Loi d'une variable aléatoire, espérance et variance.

71. On va noter B_k l'événement : « la boule obtenue au tirage numéro k est Blanche ».

a. L'événement $(X=2)$ correspond à tirer de suite deux boules Blanches ou deux boules Rouges.
Par incompatibilité puis indépendance des tirages, on a :

$$P(X=2)=P(B_1\cap B_2)+P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}.$$

L'événement $(X=3)$ correspond lui à tirer une boule d'une couleur puis deux boules de l'autre couleur.
Par incompatibilité puis indépendance, on obtient de même :

$$P(X=3)=P(\overline{B_1}\cap B_2\cap B_3)+P(B_1\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3})=\frac{3}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16}.$$

Enfin et de la même façon :

$$P(X=4)=P(B_1\cap\overline{B_2}\cap B_3\cap B_4)+P(\overline{B_1}\cap B_2\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4})=\frac{3}{16}.\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}.\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{15}{128}.$$

b. En s'inspirant de ce qui précède, on constate que l'événement $(X=2.n)$ correspond aux événements (incompatibles) consistant à obtenir une succession de boules de couleurs différentes lors des $2.n-2$ premiers tirages puis 2 boules de la même couleur, différentes de la couleur obtenue au tirage $2.n-2$.
Donc : $\forall\ n\geq 2$, $(X=2.n)$ est la réunion des événements $(B_1\cap\overline{B_2}\cap\ldots\cap B_{2.n-3}\cap\overline{B_{2.n-2}}\cap B_{2.n-1}\cap B_{2.n})$ et $(\overline{B_1}\cap B_2\cap\ldots\cap\overline{B_{2.n-3}}\cap B_{2.n-2}\cap\overline{B_{2.n-1}}\cap\overline{B_{2.n}})$ (qui sont incompatibles).
Ensuite par indépendance :

$$\forall\ n\geq 2,\ P(X=2.n)=\left(\frac{1}{4}.\frac{3}{4}\right)^{n-1}.\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}.\frac{1}{4}\right)^{n-1}.\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{8}.\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1},$$

qui est encore valable pour : $n=1$.

c. Avec un raisonnement similaire :

$$\forall\ n\geq 1,\ P(X=2.n+1)=\left(\frac{3}{4}\right).\left(\frac{1}{4}.\frac{3}{4}\right)^{n-1}.\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{3}{4}.\frac{1}{4}\right)^{n-1}.\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}.\frac{3}{4}\right)^n.\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{16}\right)^n.$$

d. On a : $\forall\ N\geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{2.N}P(X=n)=\sum_{n=1}^{N}\frac{5}{8}.\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{3}{16}\right)^n=\frac{5}{8}.\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{3}{16}\right)^n$,

qui tend vers : $\displaystyle\left[\frac{5}{8}.+\left(\frac{3}{16}\right)\right].\frac{1}{1-\frac{3}{16}}=\frac{16}{13}.\frac{13}{16}=1$,

et : $\displaystyle\sum_{n=2}^{2.N+1}P(X=n)=\sum_{n=2}^{2.N}P(X=n)+P(X=2.N+1)$,

qui tend vers 1 aussi car $P(X=2.N+1)$ tend vers 0.

e. Il est clair que la série $\displaystyle\sum_{n\geq}n.P(X=n)$ converge puisque : $2.n.P(X=2.n)=o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, de même pour les rangs impairs, donc X admet une espérance.

Puis : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n.P(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}2.n.P(X=2.n)+\sum_{n=1}^{+\infty}(2.n+1).P(X=2.n+1)$,

car les deux séries convergent.

D'où : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n.P(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}2.n.\frac{5}{8}.\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}(2.n+1).\left(\frac{3}{16}\right)^n=\frac{5}{4}.\sum_{n=1}^{+\infty}n.\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}+2.\sum_{n=1}^{+\infty}n.\left(\frac{3}{16}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^n$,

à nouveau parce que toutes les séries convergent.

Enfin : $E(X) = \left(\frac{5}{4} + 2.\frac{3}{16}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{3}{16}\right)^2} + \frac{3}{16}.\frac{1}{1-\frac{3}{16}} = \frac{26}{16}.\frac{256}{169} + \frac{3}{16}.\frac{16}{13} = \frac{32}{13} + \frac{3}{13} = \frac{35}{13}$.

72. a. Pour n fixé dans ℕ, on commence par utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements donné par $\{(X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)\}$, et :

$$P(X_{n+1} = 0) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).P(X_n = 0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0).P(X_n = 1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0).P(X_n = 2).$$

• Si $(X_n = 0)$, cela signifie qu'il y a dans $\mathscr{B}_1$ 0 boules Blanches et 2 boules Noires dans $\mathscr{B}_2$, donc on va tirer une boule Blanche dans $\mathscr{B}_2$ et la mettre dans $\mathscr{B}_1$, autrement dit X_{n+1} vaudra 1 et :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0.$$

• De même si $(X_n = 1)$, alors X_{n+1} vaudra 0 si on enlève la boule Blanche de $\mathscr{B}_1$ et qu'on ne tire pas celle qui est dans $\mathscr{B}_2$, autrement dit (les deux tirages étant indépendants) : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

• Enfin si $(X_n = 2)$, alors on ne peut avoir X_{n+1} nul car il faudrait enlever les deux boules Blanches ce qui est impossible en un seul tirage, soit : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$.

Finalement : $P(X_{n+1} = 0) = 0.P(X_n = 0) + \frac{1}{4}.P(X_n = 1) + 0.P(X_n = 2)$.

En raisonnant de la même façon, on obtient :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right).P(X_n = 1) + P(X_n = 2), \text{ et :}$$

$$P(X_{n+1} = 2) = 0.P(X_n = 0) + \frac{1}{4}.P(X_n = 1) + 0.P(X_n = 2).$$

La matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, répond alors à la question.

b. Pour : $n \geq 0$, il suffit de calculer :

$$E(X_{n+1}) = 0.P(X_{n+1} = 0) + 1.P(X_{n+1} = 1) + 2.P(X_{n+1} = 2) = P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = 1.$$

Donc la suite est bien constante à la valeur 1.

c. Le polynôme caractéristique de A se calcule par exemple en ajoutant à la première ligne les deux autres, et : $\chi_A(\lambda) = \lambda.(\lambda - 1).(\lambda + \frac{1}{2})$, soit : $Sp(A) = \left\{0, 1, -\frac{1}{2}\right\}$.

Puisque A admet 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

On trouve alors classiquement : $E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et : $E_{-\frac{1}{2}}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On peut poser : $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et on a alors :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = P.D^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.P^{-1} = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 1+2.\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2.\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 4-4.\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 4+2.\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 4-4.\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1+2.\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2.\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

d. La variable aléatoire X_0 a pour loi : $P(X_0 = 0) = 0$, $P(X_0 = 1) = 0$, $P(X_0 = 2) = 1$.

Puis on obtient celle de X_n à l'aide de : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A^n.U_0$, et en développant :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$,

- $P(X_n = 0) = \dfrac{1}{6}.\left(1+2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$,
- $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{6}.\left(4-4.\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$, et :
- $P(X_n = 2) = \dfrac{1}{6}.\left(1+2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

73. a. Soit donc : $n \in \mathbb{N}$.

La variable X_n prend ses valeurs dans $\{0,1,\ldots,n\}$ et $\{(X_n = 0),\ (X_n = 1),\ldots,(X_n = n)\}$ forme une système complet d'événements.

Donc : $\forall\ 1 \leq k \leq n+1,\ P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} P(X_{n+1} = k, X_n = i)$.

Or puisque le mobile ne peut que revenir à l'origine ou se déplacer vers la droite, on a :

$\forall\ i \neq k-1,\ P(X_{n+1} = k, X_n = i) = 0$, donc :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = k, X_n = k-1) = P_{(X_n = k-1)}(X_{n+1} = k).P(X_n = k-1) = \frac{k}{k+1}.P(X_n = k-1).$$

b. Il est alors immédiat par récurrence finie que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ 0 \leq k \leq n,\ P(X_n = k) = \frac{1}{k+1}.P(X_{n-k} = 0) = \frac{1}{k+1}.u_{n-k}.$$

c. En reprenant la remarque faite dans la question 1 sur le système complet d'événements, on a donc :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 1 = \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1}.$$

- Pour : $n = 0$, on obtient : $\dfrac{u_0}{1} = 1$, ce qui traduit bien le fait que le mobile part de l'origine.
- Pour : $n = 1$, $1 = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{u_1}{1}$, soit : $u_1 = \dfrac{1}{2}$, puis :
- pour : $n = 2$, $1 = \dfrac{u_0}{3} + \dfrac{u_1}{2} + \dfrac{u_2}{1}$, soit : $u_2 = \dfrac{5}{12}$, et :
- pour : $n = 3$, $1 = \dfrac{u_0}{4} + \dfrac{u_1}{3} + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{u_1}{1}$, soit : $u_3 = \dfrac{3}{8}$.

d. Pour : $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire : $\sum_{k=0}^{n+1} (k+1).P(X_{n+1} = k) = 1.P(X_{n+1} = 0) + \sum_{k=1}^{n+1} k.P(X_n = k-1)$.

De plus : $\sum_{k=0}^{n+1} (k+1).P(X_{n+1} = k) = E(X_{n+1}) + \sum_{k=0}^{n+1} P(X_{n+1} = k) = E(X_{n+1}) + 1$, et :

$\sum_{k=1}^{n+1} k.P(X_n = k-1) = \sum_{k=0}^{n} (k+1).P(X_n = k) = E(X_n) + \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = E(X_n) + 1$, d'où :

$E(X_{n+1})+1=u_{n+1}+E(X_n)+1$, et finalement : $E(X_{n+1})=u_{n+1}+E(X_n)$.

On en déduit par récurrence que : $\forall\ n\geq 1,\ E(X_n)=\sum_{k=1}^{n}u_k+E(X_0)=\sum_{k=1}^{n}u_k$,

car X_0 est nulle.

e. Le mobile se retrouve à l'origine à l'instant n pour la première fois s'il n'a fait que se déplacer vers la droite, sauf au dernier mouvement où il est revenu à l'origine soit :

$\forall$ n $\in$ ℕ*, $(T=n)=(X_1=1)\cap\ldots\cap(X_{n-1}=n-1)\cap(X_n=0)$,

et donc par la formule des probabilités composées :

$$P(T=n)=P(X_1=1).P_{(X_1=1)}((X_2=2)\cap\ldots(X_{n-1}=n-1)\cap(X_n=0))=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n}.\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n.(n+1)}.$$

Puisque T prend ses valeurs dans ℕ, on en déduit que :

$$P(T=0)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}P(T=n)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=1-(1-0)=0.$$

Autrement dit il est presque sûr que le mobile ne reviendra pas à l'origine.

f. Enfin, il est clair que la série $\sum_{n\geq 0}n.P(T=n)$ diverge puisque c'est la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}$, et T n'admet donc pas d'espérance.

Lois usuelles, modélisations.

74. Dans cet exercice on va noter :

- $Num(i)$ la variable aléatoire donnant le numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ième}}$ tirage, pour : $i\geq 1$,
- A_n l'événement : « la boule obtenue au $n^{\text{ième}}$ tirage est identique à celle obtenue au $(n-1)^{\text{ième}}$ tirage », pour : $n\geq 2$.

En particulier, on a donc : $\forall\ n\geq 2,\ A_n=(Num(n)=Num(n-1))=(Num(n)-Num(n-1)=0)$.

Les variables aléatoires $Num(i)$ étant mutuellement indépendantes, les événements A_n le sont aussi.

On peut également indiquer que : $T(\Omega)=\{k,\,k+1,\ldots\}\cup\{+\infty\}$,

puisque le premier tirage où on peut obtenir k boules identiques est bien le $k^{\text{ième}}$.

a. L'événement $(T=k)$ alors à l'événement : « toutes les boules tirées sont identiques », autrement dit à l'événement : $(Num(k)=Num(k-1))\cap\ldots\cap(Num(2)=Num(1))$, soit encore $A_k\cap\ldots\cap A_2$, qu'il vaut mieux penser ''en commençant par la fin'' (autrement dit le $k^{\text{ième}}$ tirage).

Donc par indépendance on a : $P(T=k)=P(A_k\cap\ldots\cap A_2)=P(A_k)\ldots P(A_2)=\frac{1}{N}\ldots\frac{1}{N}=\frac{1}{N^{k-1}}$.

De même l'événement $(T=k+1)$ correspond au fait qu'on obtient k boules identiques à l'instant $k+1$ (autrement dit que les boules $2,\ldots,k+1$ sont identiques) et pas avant.

Donc : $(T=k+1)=\left(\bigcap_{i=2}^{k}(Num(i)=Num(i-1))\right)\cap(Num(2)\neq Num(1))=A_{k+1}\cap\ldots\cap A_3\cap\overline{A_2}$,

et à nouveau par indépendance : $P(T=k+1)=P(A_{k+1})\ldots P(A_3).P(\overline{A_2})=\frac{1}{N^{k-1}}.\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{N-1}{N^k}$

b. De la même façon, pour : $n\geq 1$, l'événement $(T=k+n)$ s'écrit :

$$(T=k+n)=\left(\bigcap_{i=2}^{k}(Num(n+i)=Num(n+i-1))\right)\cap(Num(n+1)\neq Num(n))\cap\overline{(T\leq n)}.$$

En effet, cela correspond bien au fait que toutes les boules obtenues aux tirages $n+k,\ldots,n+1$ sont identiques, mais pas à celle obtenue au $n^{\text{ième}}$ tirage, et qu'on n'a pas obtenu k boules identiques jusqu'au $n^{\text{ième}}$ tirage.

Puis on réécrit : $(T=k+n)=A_{n+k}\cap\ldots\cap A_{n+2}\cap\overline{A_{n+1}}\cap\overline{(T\leq n)}$.

Enfin par indépendance (justifiée avec des arguments similaires à ceux de la question a.) :

$$P(T=k+n)=P(A_{n+k})\ldots P(A_{n+2}).P(\overline{A_{n+1}})P.(\overline{(T\leq n)})=\frac{N-1}{N^k}.P(T>n),$$

puisque l'événement contraire de $(T \leq n)$ est bien : $(T > n)$.

c. Puisque les événements $((T = k+n))_{n\geq 1}$ sont incompatibles, la série $\sum_{n\geq 1} P(T = k+n)$ est convergente et donc la série $\sum_{n\geq 1} P(T > n)$, aussi.

Et comme la variable aléatoire T est à valeurs dans ℕ, on en déduit qu'elle admet une espérance.

De plus : $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) = P(T > 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(T > n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{N^k}{N-1}.P(T = k+n)$.

En effet on a admis que l'opération s'arrête presque sûrement donc que $((T = n), n \geq 1)$ forme un système complet (ou quasi-complet) d'événements, et donc que : $P(T > 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) = 1$.

Enfin et puisque T est en fait à valeurs dans $\{k, k+1, \ldots\}$, on a :

$$1 = \sum_{n=k}^{+\infty} P(T = n) = P(T = k) + \sum_{n=k+1}^{+\infty} P(T = n) = P(T = k) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = k+n),$$

et donc : $E(T) = 1 + \frac{N^k}{N-1}.(1 - P(T = k)) = 1 + \frac{N^k}{N-1}.\left(1 - \frac{1}{N^{k-1}}\right) = \frac{N^k - 1}{N-1}$.

Remarque : on peut noter que si : $k = 1$, (soit une séquence d'une seule boule « identique » à obtenir) on a bien : $E(T) = 1$.

d. Soient les événements B_n : « les boules obtenues aux tirages $n.k+1, \ldots, n.k+k$ sont identiques ».

Alors : $B_n = A_{n.k+k} \cap \ldots \cap A_{n.k+2}$,

et toujours par indépendance : $P(B_n) = P(A_{n.k+k}) \ldots P(A_{n.k+2}) = \frac{1}{N^{k-1}}$.

Soit enfin B l'événement : « l'opération ne s'arrête pas ».

Si l'un des événements B_n se réalise, alors B ne se réalise pas.

Par contraposée, si B est réalisé, alors aucun des événements B_n ne se réalise.

Donc : $B \subset \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}$.

Enfin : $\forall\ m \in$ ℕ, $P\left(\bigcap_{n=0}^{m} \overline{B_n}\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{m} \overline{B_n}\right) = \prod_{n=0}^{m} P(\overline{B_n}) = \prod_{n=0}^{m} (1 - P(B_n)) = \left(1 - \frac{1}{N^{k-1}}\right)^{m+1}$,

par indépendance, et enfin par continuité décroissante :

$$P(B) \leq P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}\right) = \lim_{m\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{m} \overline{B_n}\right) = 0,$$

puisque : $N \geq 2$, et : $k \geq 2$.

On conclut bien que : $P(B) = 0$, et donc que l'événement : « l'opération s'arrête », est presque sûr.

75. a. Puisque X correspond au nombre de boules Noires tirées, l'ordre dans lequel elles apparaissent n'est pas important et seul l'ensemble des boules (Blanches ou Noires) tirées est important.

Donc Ω peut être choisi comme univers de l'expérience.

b. $X(\Omega)$ est un ensemble d'entiers positifs.

Le nombre maximum de boules Noires tirées est :

- n, s'il y a plus de n boules Noires au départ, soit : $n \leq N.p$, et :
- $N.p$ s'il n'y a pas n boules Noires au départ, donc si : $N.p < n$.

La valeur maximale que peut prendre $X(\Omega)$ est le plus petit de ces deux entiers soit : $\min(n, p.N)$.

D'autre part la valeur minimale de $X(\Omega)$ sera :

- 0, si on peut tirer n boules Blanches, donc si : $n \leq N.q$, et :
- $n - N.q$, c'est-à-dire le nombre de boules Noires qu'il faudra obligatoirement tirer une fois qu'on aura épuisé le stock de boules Blanches s'il y a moins de n boules Blanches, autrement dit quand : $N.q < n$.

La valeur minimale que peut prendre $X(\Omega)$ est le plus grand de ces deux entiers : $\max(0, n - q.N)$.

Finalement : $\{X(\Omega) = \{\max(0, n-q.N), ..., \min(n, p.N)\}$.

c. Pour : $k \in X(\Omega)$, le nombre d'éléments de $X(\Omega)$ correspondant à $(X = k)$ est le nombre d'ensembles contenant k boules Noires (prises parmi $N.p$) multiplié par le nombre d'ensembles contenant $n-k$ boules Blanches (prises parmi $N.q$).
Comme cette situation correspond clairement à une équiprobabilité de tirage pour chaque boule, on munit $X(\Omega)$ de la probabilité uniforme et : $P(X = k) = \dfrac{\binom{N.p}{k}.\binom{N.q}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

76. a. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, S_n correspond au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ième}}$ succès, soit le nombre d'épreuves pour obtenir le premier plus le nombre d'épreuves supplémentaires pour obtenir le deuxième, et ainsi de suite jusqu'à obtenir le $n^{\text{ième}}$ soit : $S_n = T_1 + ... + T_n$.

b. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, T_n suit la loi géométrique $\mathscr{G}(1-x)$ (loi du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même loi) et :
$\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ P(T_n = k) = x^{k-1}.(1-x)$.
Classiquement, on a alors : $E(T_n) = \dfrac{1}{1-x}$, et : $V(T_n) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

c. La loi de S_1 est la loi de T_1 et : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ P(S_1 = k) = x^{k-1}.(1-x)$.
Puisque de plus : $S_2 = T_1 + T_2$, S_2 est à valeurs dans $\mathbb{N} - \{0,1\}$, et :
$$\forall\ k \geq 2,\ P(S_2 = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(T_1 = i, T_2 = k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} P(T_1 = i).P(T_2 = k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} x^{i-1}.(1-x).x^{k-i-1}.(1-x),$$
par incompatibilité puis indépendance.
D'où : $\forall\ k \geq 2,\ P(S_2 = k) = x^{k-2}.(1-x)^2.(k-1)$.

d. Soit : $n \in \mathbb{N}^*$.
On remarque tout d'abord que S_n est à valeurs dans $\{n, n+1, ...\}$, puisqu'il faut au moins n épreuves pour obtenir n succès.
Puis : $\forall\ k \geq n$, appelons E_k l'événement : « on obtient $n-1$ succès lors des k premières épreuves », et A_k l'événement : « obtenir un succès à la $k^{\text{ième}}$ épreuve ».
Alors : $P(S_n = k) = P(E_{k-1} \cap A_n) = P(E_{k-1}).P(A_n)$, par indépendance des épreuves.
Puis E_k correspond à obtenir k succès dans la répétition de $n-1$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même loi, donc : $P(E_k) = \binom{k}{n-1}.(1-x)^{n-1}.x^{k-(n-1)}$.
Donc : $P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1}.(1-x)^{n-1}.x^{k-n}.(1-x) = \binom{k-1}{n-1}.(1-x)^n.x^{k-n}$,
ce qui redonne bien la loi de S_1 ou de S_2.

e. Pour n fixé, la variable S_n vérifie : $\sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k) = 1$,
donc : $1 = \sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}.(1-x)^n.x^{k-n} = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^n.\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}.x^k$,
d'où : $\forall\ x \in\ ]0,1[,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}.x^k = \dfrac{x^n}{(1-x)^n}$.

77. a. Comme somme d'une famille de n variables de Bernoulli indépendantes et de même loi, S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ c'est-à-dire :

- S_n prend ses valeurs dans $\{0,..., n\}$, et :
- $\forall\ 0 \le k \le n$, $P(S_n = k) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$.

b. L'événement $(S_1\ est\ pair)$ correspond à $(X_1 = 0)$, donc : $P(S_1\ est\ pair) = P(X_1 = 0) = 1-p$.
u_2 correspond à l'événement : $(S_2\ est\ pair) = (S_2 = 0) \cup (S_2 = 2) = (X_1 = 0, X_2 = 0) \cup (X_1 = 1, X_2 = 1)$,
soit par incompatibilité et indépendance : $u_2 = P(S_2\ est\ pair) = (1-p)^2 + p^2$.
Puis $(S_3\ est\ pair)$ est la réunion disjointe de :
$(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0)$, et de :
$(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0)$.
D'où à nouveau par indépendance : $u_3 = P(S_3\ est\ pair) = 3.(1-p).p^2 + (1-p)^3$.

c. On utilise pour cette question le système complet d'événements $\{(S_n\ est\ pair), (S_n\ est\ impair)\}$, et :
$u_{n+1} = P(S_{n+1}\ est\ pair) = P(S_{n+1}\ est\ pair, S_n\ est\ pair) + P(S_{n+1}\ est\ pair, S_n\ est\ impair)$, et donc :

$$u_{n+1} = P_{(S_n\ est\ pair)}(S_{n+1}\ est\ pair).P(S_n\ est\ pair)$$
$$+ P_{(S_n\ est\ impair)}(S_{n+1}\ est\ pair).P(S_n\ est\ impair).P(S_n\ est\ impair).$$

Puis : $P_{(S_n\ est\ pair)}(S_{n+1}\ est\ pair) = P(X_{n+1} = 0) = (1-p)$,
de même : $P_{(S_n\ est\ impair)}(S_{n+1}\ est\ pair) = P(X_{n+1} = 1) = p$.
D'où : $u_{n+1} = (1-p).u_n + p.(1-u_n) = (1-2.p).u_n + p$, soit bien la relation attendue.
(u_n) constitue alors une suite arithmético-géométrique et on commence par trouver ω tel que :
$\omega = a.\omega + b$, qui donne : $\omega = \frac{1}{2}$, puis : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $(u_n - \omega) = (1-2.p)^{n-1}.(u_1 - \omega)$, soit :
$\forall$ n $\in$ ℕ*, $u_n = \frac{1}{2} + (1-2.p)^{n-1}.(1-p-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.(1-2.p)^n$.
On en déduit en particulier que (u_n) tend vers $\frac{1}{2}$.
C'est assez peu surprenant puisque même si l'expérience de Bernoulli est déséquilibrée, ce déséquilibre contribue autant à la parité qu'à l'imparité de S_n, qui sur un très grand nombre de répétition a finalement une probabilité d'être pair qui tend vers $\frac{1}{2}$, soit autant que d'être impair.

78. On va noter classiquement : $q = 1-p$.

a. X_k correspond à une succession d'expériences de Bernoulli et exprime le premier succès obtenu : elle suit donc une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ et : $\forall\ 1 \le k \le n$, $\forall\ i \in$ ℕ*, $P(X_k = i) = p.(1-p)^{i-1} = p.q^{i-1}$.
De plus : $E(X_k) = \frac{1}{p}$, et : $V(X_k) = \frac{1-p}{p^2}$.

b. Le nombre de semaines nécessaires à la prise d'au moins une greffe est plus grand que m si et seulement si tous les rosiers ont besoin d'au moins m semaines pour qu'une greffe prenne, et donc :
$(Y \ge m) = (X_1 \ge m) \cap ... \cap (X_n \ge m)$,
d'où par indépendance : $P(Y \ge m) = P(X_1 \ge m)...P(X_n \ge m)$.
Puis par incompatibilité : $\forall\ 1 \le k \le n$, $P(X_k \ge m) = \sum_{i=m}^{+\infty} P(X_k = i) = p.\sum_{i=m}^{+\infty} q^{i-1} = p.\frac{q^{m-1}}{1-(1-p)} = q^{m-1}$,
et donc : $P(Y \ge m) = q^{n.(m-1)}$.
On en déduit à nouveau par incompatibilité que : $P(Y \ge m) = P(Y \ge m+1) + P(Y = m)$, d'où :
$P(Y = m) = q^{n.(m-1)} - q^{n.m} = q^{n.(m-1)}.(1-q^n)$.
Remarque : pour : $m = 1$, on retrouve bien la loi géométrique.

Il est alors clair que $\sum_{m\geq 1} m.P(Y=m)$ converge car : $m.q^{n.(m-1)}.(1-q^n) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{m^2}\right)$, et :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m.q^{n.(m-1)}.(1-q^n) = (1-q^n).\sum_{m=1}^{+\infty} m.(q^n)^{(m-1)} = (1-q^n).\frac{1}{(1-q^n)^2} = \frac{1}{1-q^n}.$$

c. De même, on a : $(Z \leq m)$ si et seulement si les greffes ont pris sur tous les rosiers en moins de m semaines, soit : $(Z \leq m) = (X_1 \leq m) \cap ... \cap (X_n \leq m)$, et par indépendance :

$$P(Z \leq m) = P(X_1 \leq m)...P(X_n \leq m).$$

Puis par incompatibilité : $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $P(X_k \leq m) = \sum_{i=1}^{m} P(X_k = i) = \sum_{i=1}^{m} p.q^{i-1} = p.\frac{1-q^m}{1-q} = 1-q^m$.

Donc : $P(Z \leq m) = (1-q^m)^n$.

De même qu'auparavant, on a : $P(Z \leq m+1) = P(Z \leq m) + P(Z = m+1)$, et :

- $P(Z=1) = p^n$, (ce qui traduit le fait que toutes les greffes prennent dès la première semaine) et :
- $\forall\ m \geq 2$, $P(Z=m) = P(Z \leq m) - P(Z \leq m-1) = (1-q^m)^n - (1-q^{m-1})^n$.

d. Le théorème 3.2 montre que Z admet une espérance lorsque la série $\sum_{m\geq 1} P(Z \geq m)$ converge ce qui est équivalent à la convergence de la série $\sum_{m\geq 0} P(Z > m)$.

Or : $P(Z > m) = 1-(1-q^m)^n$, et quand m tend vers $+\infty$: $1-(1-q^m)^n = 1-(1-n.q^m + o(q^m)) \underset{+\infty}{\sim} n.q^m$.

Comme série à termes positifs, cet équivalent (au terme général d'une série géométrique convergente) montre la convergence de la série $\sum_{m\geq 0} P(Z > m)$.

e. Enfin, pour : $n = 2$, on a : $\sum_{m=0}^{+\infty} (1-(1-q^m))^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} (2.q^m - q^{2.m}) = \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{1+2.q}{1-q^2} = \frac{3-2.p}{(2-p).p}$.

79. a. S est tout d'abord à valeurs dans $\mathbb{N}$, puis pour : $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $P_{(N=n)}(S=k)$ vaut :

- 0 si : $k > n$ (on ne peut avoir plus de succès que d'épreuves effectuées),
- $\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$, si : $k \leq n$, puisque c'est le nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(S=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(N=n)}(S=k).P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{p^k.e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}.\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{((1-p).\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Avec une translation d'indice, on obtient :

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ P(S=k) = \frac{(p.\lambda)^k}{k!}.e^{-\lambda}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-p).\lambda)^n}{n!} = \frac{(p.\lambda)^k}{k!}.e^{-\lambda}.e^{(1-p).\lambda} = \frac{(p.\lambda)^k}{k!}.e^{-p.\lambda},$$

et on reconnaît une loi de Poisson de paramètre $(p.\lambda)$.

De même E est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et par symétrie, E suit la loi de Poisson de paramètre $((1-p).\lambda)$.

Enfin, pour : $(k,k') \in \mathbb{N}^2$, on a : $(S=k, E=k') = (N=k+k', S=k)$.

Donc : $P(S=k, E=k') = \binom{k+k'}{k}.p^k.(1-p)^{k+k'-k}.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{k+k'}}{(k+k')!} = e^{-p.\lambda}.e^{-(1-p).\lambda}.\frac{p^k.(1-p)^{k'}.\lambda^{k+k'}}{k!.k'!}$,

et on constate qu'on a bien : $P(S=k, E=k') = e^{-p.\lambda}.\frac{(p..\lambda)^k}{k!}.e^{-(1-p).\lambda}.\frac{((1-p).\lambda^{k'}}{k'!} = P(S=k).P(E=k')$.

Les variables S et E sont donc bien indépendantes.

b. Pour : $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on peut écrire :

$$P(N=m+n,S=n)=P(N=m+n).P_{(N=m+n)}(S=n)=P(N=m+n).\binom{m+n}{n}.p^n.(1-p)^m,$$

mais aussi par indépendance : $P(N=m+n,S=n)=P(E=m,S=n)=P(E=m).P(S=n)$,

ce qui donne l'égalité : $P(N=m+n).(m+n)!.\dfrac{p^n.(1-p)^m}{n!.m!}=P(S=n).P(E=m)$,

et finalement : $(m+n)!.P(N=m+n)=\left(\dfrac{P(S=n)}{p^n}.n!\right).\left(\dfrac{P(E=m)}{(1-p)^m}.m!\right)$.

On a bien obtenu ce qu'on voulait avec : $u_n=\dfrac{P(S=n)}{p^n}.n!$, et : $v_m=\dfrac{P(E=m)}{(1-p)^m}.m!$.

On en déduit alors que : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ u_n.v_0=P(N=n).n!=u_{n-1}.v_1$,

et comme par hypothèse $P(N=n)$ ne s'annule jamais, on en déduit que :

- $v_0\neq 0$,
- puis que : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=u_{n-1}.\dfrac{v_1}{v_0}$.

La suite (u_n) est ainsi géométrique (de raison : $\alpha=\dfrac{v_1}{v_0}$), et (v_m) par symétrie (de raison : $\beta=\dfrac{u_1}{u_0}$).

On a alors : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ n!.P(N=n)=u_n.v_0=(u_0.v_0).\alpha^n$, et : $P(N=n)=(u_0.v_0).\dfrac{\alpha^n}{n!}$.

Enfin : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=n)=1=(u_0.v_0).\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=(u_0.v_0).e^{\alpha}$, d'où : $(u_0.v_0)=e^{-\alpha}$, et finalement :

$\forall\ n\in\mathbb{N},\ P(N=n)=e^{-\alpha}.\dfrac{\alpha^n}{n!}$, autrement dit N suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\alpha)$.

80. a. Puisque les variables $X_1,...,X_n$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, U est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

il est ensuite plus simple de calculer $P(k\leq U)$ car :

$\forall\ k\in\mathbb{N}^*,\ (k\leq U)=(k\leq X_1)\cap...\cap(k\leq X_n)$,

et par indépendance : $P(k\leq U)=P(k\leq X_1)...P(k\leq X_n)$.

Mais comme de plus : $\forall\ 1\leq i\leq n$, $\forall\ k\in\mathbb{N}^*,\ P(k\leq X_i)=\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty}P(X_i=j)=\sum_{j=k}^{+\infty}p.q^{j-1}=p.\frac{q^{k-1}}{1-q}=q^{k-1}$,

on en déduit que : $P(k\leq U)=(q^{k-1})^n$.

De là, on peut écrire par incompatibilité : $\forall\ k\in\mathbb{N}^*,\ P(U\geq k)=P(U=k)+P(U\geq k+1)$,

soit : $\forall\ k\in\mathbb{N}^*,\ P(U=k)=q^{n.(k-1)}-q^{n.k}=(1-q^n).(q^n)^{.(k-1)}$,

autrement dit U suit la loi géométrique de paramètre $(1-q^n)$.

U admet donc une espérance qui vaut : $E(U)=\dfrac{1}{1-q^n}$.

b. De même, V est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et : $\forall\ k\in\mathbb{N}^*,\ (V\leq k)=(X_1\leq k)\cap...\cap(X_n\leq k)$.

A nouveau par indépendance : $P(U\leq k)=P(X_1\leq k)...P(X_n\leq k)=(P(X_1\leq k))^n$.

Puis : $P(X_1\leq k)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}P(X_1=j)=\sum_{j=1}^{k}p.q^{j-1}=p.\frac{1-q^k}{1-q}=1-q^k$ et : $P(V\leq k)=(1-q^k)^n$.

Toujours par incompatibilité, on en déduit que :

$\forall\ k\in\mathbb{N}^*,\ P(V=k)=P(V\leq k)-P(V\leq k-1)=(1-q^k)^n-(1-q^{k-1})^n$.

On constate ensuite que la série $\displaystyle\sum_{k\geq1}P(V\geq k)$ converge puisque :

$$P(V\geq k)=1-P(V<k)=1-P(V\leq k-1)=1-(1-q^{k-1})^n\underset{k\to+\infty}{\sim}(q^n)^{k-1},$$

qui est bien le terme général d'une série convergente.

Enfin : $E(V)=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-(1-q^{k-1})^n)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-(1-q^k)^n)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i.\binom{n}{i}.q^{k.i})=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}.\binom{n}{i}.q^{k.i}$.

On fait ainsi apparaître la somme de n séries, toutes convergentes puisque :

$\forall\ 1\le i\le n$, $\sum_{k=0}^{+\infty}q^{k.i}=\frac{1}{1-q^i}$, et donc : $E(V)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}.\binom{n}{i}.\sum_{k=0}^{+\infty}q^{k.i}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}.\binom{n}{i}.\frac{1}{1-q^i}$.

Couple et famille de variables aléatoires.

81\. a. X suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b. On cherche ainsi le nombre de Piles que B va obtenir au cours de n lancers.
Cette variable aléatoire suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, et :

$\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\ 0\le k\le n$, $P_{(X=n)}(Y=k)=\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$.

c. On utilise ici le système complet d'événements $\{(X=n),\ n\in\mathbb{N}^*\}$ et la formule des probabilités totales donne : $P(Y=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(Y=0,X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}P_{(X=n)}(Y=0).P(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{0}.p^0.q^{n-0}.p.q^{n-1}$,

et donc : $P(Y=0)=p.q.\sum_{n=1}^{+\infty}(q^2)^{n-1}=p.q.\frac{1}{1-q^2}=\frac{p.q}{(1-q).(1+q)}=\frac{q}{1+q}$.

Pour : $k\ge 1$, on a de même : $P(Y=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}P_{(X=n)}(Y=k).P(X=n)$.

Mais dans cette somme, on a : $P_{(X=n)}(Y=k)=0$, dès que : $k>n$, et donc :

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P_{(X=n)}(Y=k).P(X=n)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}.p.q^{n-1}=p^{k+1}.q^{k-1}.\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}.(q^2)^{n-k}.$$

On utilise alors la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}x^k$ qui conduit à l'égalité :

$\forall\ x\in\ ]-1,+1[$, $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}n.(n-1)\ldots(n-k+1).x^{n-k}$, ou : $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}.x^{n-k}$.

On a donc : $P(Y=k)=p^{k+1}.q^{k-1}.\frac{1}{(1-q^2)^{k+1}}=\left(\frac{p}{1-q}\right)^{k+1}.\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}.\frac{1}{(1+q)^2}=\frac{1}{(1+q)^2}.\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$.

On constate alors bien que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k)=\frac{q}{1+q}+\frac{1}{(1+q)^2}.\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}=\frac{q}{1+q}+\frac{1}{(1+q)^2}.\frac{1}{1-\frac{q}{1+q}}=\frac{q}{1+q}+\frac{1+q}{(1+q)^2}=1.$$

d. Notons alors G_B l'événement « B gagne » et G_A l'événement « A gagne ».

Alors : $P(G_B)=P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-\frac{q}{1+q}=\frac{1}{1+q}$.

Donc on en déduit que : $P(G_A)=1-P(G_B)=\frac{q}{1+q}$.

Comme on a : $q<1$, on a toujours : $P(G_A)<P(G_B)$, et donc le jeu n'est pas équitable, déséquilibré en faveur de B.

82\. a. Pour obtenir k succès, il est nécessaire d'avoir au moins k variables de Bernoulli qui interviennent.
De plus, obtenir k succès peut intervenir au bout d'un temps aussi long qu'on veut.
On aura ainsi : $\forall\ k\in\mathbb{N}^*$, $T_k(\Omega)=\{k,k+1,\ldots\}\cup\{+\infty\}$.

Puis pour : $n\ge k$, obtenir k pour la première fois au bout de n essais est équivalent à obtenir $k-1$ succès au cours des $n-1$ premiers essais et un dernier au $n^{\text{ième}}$ essai, ce qui s'écrit :

$\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \forall\ n \geq k$, $(T_k = n) = (T_{k-1} \leq n-1) \cap (X_n = 1)$.

Les variables X_i mutuellement indépendantes, T_{k-1} et X_n le sont aussi et :

$P(T_k = n) = P(T_{k-1} \leq n-1).P(X_n = 1)$.

Or $(T_{k-1} \leq n-1)$ est équivalent à distribuer $k-1$ succès parmi les $n-1$ variables $X_1, ..., X_{n-1}$ est sa probabilité est donnée par une loi binomiale, d'où :

$$P(T_k = n) = \binom{n-1}{k-1}.p^{k-1}.q^{(n-1)-(k-1)}.p = \binom{n-1}{k-1}.p^k.q^{n-k}.$$

b. On va montrer le résultat demandé par récurrence sur k .

- T_1 est le temps d'attente du premier succès et suit bien la loi géométrique Y_1.
- Soit : $k \in \mathbb{N}^*$, tel que T_k et $Y_1 + ... + Y_k$ suivent la même loi.

On a alors : $T_{k+1} = Y_1 + ... + Y_k + Y_{k+1} = T_k + Y_{k+1}$, et :

$$\forall\ n \geq k+1,\ (T_{k+1} = n) = \bigcup_{i=k}^{n-1}((T_k = i) \cap (Y_k = n-i)),$$

et toujours par indépendance :

$$P(T_{k+1} = n) = \sum_{i=k}^{n-1} P(T_k = i).P(Y_k = n-i) = \sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1}.p^k.q^{i-k}.p.q^{n-i-1} = p^{k+1}.q^{n-k-1}.\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1}.$$

Pour cette dernière somme, on montre par récurrence que :

$$\forall\ m \geq k+1,\ \sum_{i=k}^{m-1}\binom{i-1}{k-1} = \binom{m-1}{k}.$$

En effet, elle est vraie pour : $m = k+1$, puisque : $\displaystyle\sum_{i=k}^{k}\binom{i-1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$,

et si on la suppose vraie pour m donné, $m \geq k+1$, alors :

$$\sum_{i=k}^{m}\binom{i-1}{k-1} = \sum_{i=k}^{m-1}\binom{i-1}{k-1} + \binom{m-1}{k-1} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} = \binom{m}{k}.$$

Donc : $P(T_{k+1} = n) = p^{k+1}.q^{n-k-1}.\displaystyle\binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{(k+1)-1}.p^{k+1}.q^{n-(k+1)}$,

ce qui termine la récurrence.

c. Par combinaison linéaire, T_k admet donc une espérance et une variance.

Puis par linéarité : $E(T_k) = E(Y_1) + ... + E(Y_k) = k.\dfrac{1}{p} = \dfrac{k}{p}$.

Enfin, les variables Y_i étant indépendantes : $V(T_k) = V(Y_1) + ... + V(Y_k) = k.\dfrac{1-p}{p^2}$.

83. Notons P_k (respectivement F_k) l'événement : « le $k^{\text{ième}}$ lancer a donné Pile (respectivement Face) », et posons classiquement : $q = 1-p$.

a. La variable L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Puis pour : $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(L_1 = n) = (F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1}) \cup (P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1})$,

et ces événements étant incompatibles, on en déduit que :

$P(L_1 = n) = P(F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1}) + P(P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1})$.

Puis par indépendance : $P(L_1 = n) = (1-p)^n.p + p^n.(1-p) = q^n.p + p^n.q$.

Il est ensuite clair que L_1 admet une espérance car : $n.P(L_1 = n) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et :

$$E(L_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.p^n.q + \sum_{n=1}^{+\infty} n.q^n.p = p.q.\frac{1}{(1-p)^2} + q.p.\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

b. Tout d'abord L_1 et L_2 prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Puis : $\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$,

$$(L_1 = n, L_2 = m) = (F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1} \cap ... \cap P_{n+m} \cap F_{n+m+1}) \cup (P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1} \cap ... \cap F_{n+m} \cap P_{n+m+1}).$$

A nouveau par incompatibilité puis indépendance :

$$P(L_1 = n, L_2 = m) = q^n.p^m.q + p^n.q^m.p = p^{n+1}.q^m + q^{n+1}.p^m.$$

c. On en déduit, par la formule des probabilités totales que : $\forall\ m \in \mathbb{N}^*$,

$$P(L_2 = m) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n, L_2 = m) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1}.q^m + \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1}.p^m = q^m.\frac{p^2}{1-p} + p^m.\frac{q^2}{1-q} = p^2.q^{m-1} + q^2.p^{m-1}.$$

Pour la même raison que pour L_1, L_2 admet une espérance et :

$$E(L_2) = \sum_{m=1}^{+\infty} m.p^{m-1}.q^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} m.q^{m-1}.p^2 = q^2.\frac{1}{(1-p)^2} + p^2.\frac{1}{(1-q)^2} = 2.$$

d. Par la formule du transfert, cela revient à montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} n.m.P(L_1 = n, L_2 = m)\right)$ converge.

Or : $\forall\ n \geq 1$, la série $\sum_{m\geq 1} n.m.P(L_1 = n, L_2 = m)$ converge car :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} n.m.P(L_1 = n, L_2 = m) = n.\sum_{m=1}^{+\infty} m.(p^{n+1}.q^m + q^{n+1}.p^m) = n.p^{n+1}.q.\frac{1}{(1-q)^2} + n.q^{n+1}.p.\frac{1}{(1-p)^2},$$

soit : $\sum_{m=1}^{+\infty} n.m.P(L_1 = n, L_2 = m) = n.p^{n-1}.q + n.q^{n-1}.p$.

Puis la série $\sum_{n\geq 1}(n.p^{n-1}.q + n.q^{n-1}.p)$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n.p^{n-1}.q + n.q^{n-1}.p) = q.\sum_{n=1}^{+\infty} n.p^{n-1} + p.\sum_{n=1}^{+\infty} n.q^{n-1} = q.\frac{1}{(1-p)^2} + p.\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{p+q}{p.q} = \frac{1}{p.q}.$$

Donc le couple (L_1, L_2) admet une covariance et :

$$\mathrm{cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{p.q} - 2.\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) = \frac{1 - 2.p^2 - 2.(1-p)^2}{p.q} = \frac{-4.p^2 + 4.p - 1}{p.q} = -\frac{(2.p-1)^2}{p.q}.$$

e. • Si : $p \neq \frac{1}{2}$, alors : $\mathrm{cov}(L_1, L_2) \neq 0$, et L_1 et L_2 ne sont pas indépendantes.

• Si : $p = \frac{1}{2}$, alors : $\mathrm{cov}(L_1, L_2) = 0$, mais ça ne suffit pas pour garantir l'indépendance de L_1 et L_2.

Cependant :

$$\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^{*2},\ P(L_1 = n, L_2 = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{2^{n+m}}, \text{ et :}$$

$$\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^{*2},\ P(L_1 = n).P(L_2 = m) = \left(\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\right) = \frac{1}{2^{n+m}},$$

et les variables L_1 et L_2 sont alors bien indépendantes.

84. a. La série converge puisque : $\forall\ x \in]-1,+1[$, $n.(n-1).(n-2).x^{n-3} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

De plus : $\forall\ x \in]-1,+1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n.(n-1).(n-2).x^{n-3} = \sum_{n=3}^{+\infty} n.(n-1).(n-2).x^{n-3} = \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{6}{(1-x)^4}$.

b. Tout d'abord (X, Y) est à valeurs dans $\mathbb{N}^*\times(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$.

Puis : $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ m \geq 2$,

• si : $m \leq n$, alors : $P(X = n, Y = m) = 0$,

car il ne peut y avoir une 2ième réalisation avant la première.

• si : $m > n$, alors : $(X = n, Y = m) = (E_1 \cap ... \cap E_{n-1} \cap S_n \cap E_{n+1} \cap ... \cap E_{m-1} \cap S_m)$,

en notant E_k l'événement « échec à l'épreuve k » et S_k l'événement « succès à l'épreuve k ».

Par indépendance, on a alors : $P(X=n,Y=m)=(1-p)^{(m-1)-1}.p^2=(1-p)^{m-2}.p^2$.
On en déduit que :

$$\forall\ n\geq 1,\ P(X=n)=\sum_{m=2}^{+\infty}P(X=n,Y=m)=\sum_{m=n+1}^{+\infty}(1-p)^{m-2}.p^2=p^2.\frac{(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}=p.(1-p)^{n-1},$$

et X suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, ce qui est assez logique.

Puis : $\forall\ m\geq 2$, $P(Y=m)=\sum_{n=2}^{+\infty}P(X=n,Y=m)=\sum_{n=1}^{m-1}(1-p)^{m-2}.p^2=(m-1).(1-p)^{m-2}.p^2$.

c. X admet une espérance et une variance, suivant la loi géométrique, et : $E(X)=\frac{1}{p}$, et : $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

Puis Y et Y^2 admettent une espérance puisque :

$$(m-1).(1-p)^{m-2}.p^2=o_{+\infty}\left(\frac{1}{m^2}\right),\text{ et : }[(m-1).(1-p)^{m-2}.p^2]^2=o_{+\infty}\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

donc Y admet aussi une variance.

De plus : $E(Y)=\sum_{m=2}^{+\infty}m.(m-1).(1-p)^{m-2}.p^2=p^2.\frac{2}{(1-(1-p))^3}=\frac{2}{p}$, et par la formule du transfert :

$$E(Y^2)=\sum_{m=2}^{+\infty}m^2.(m-1).(1-p)^{m-2}.p^2=\sum_{m=2}^{+\infty}m.(m+1).(m-1).(1-p)^{m-2}.p^2-.E(Y),\text{ d'où :}$$

$$E(Y^2)=p^2.\sum_{m=2}^{+\infty}(m+1).m.(m-1).(1-p)^{(m+1)-3}-\frac{2}{p}=p^2.\frac{6}{(1-(1-p))^4}-\frac{2}{p}=\frac{6}{p^2}-\frac{2}{p}.$$

On en déduit que : $V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{6}{p^2}-\frac{2}{p}-\frac{4}{p^2}=\frac{2.(1-p)}{p^2}$.

d. La variable aléatoire $X.Y$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{m\geq 2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}n.m.P(X=n,Y=m)\right)$ converge et pour cela :

$$\forall\ n\geq 1,\ \sum_{n=1}^{+\infty}n.m.P(X=n,Y=m)=\sum_{n=1}^{m-1}n.m.(1-p)^{m-2}.p^2=m.p^2.(1-p)^{m-2}.\frac{(m-1).m}{2}.$$

Puis : $E(X.Y)=\sum_{m=2}^{+\infty}m^2.p^2.(1-p)^{m-2}.\frac{(m-1)}{2}=\frac{p^2}{2}.\sum_{m=2}^{+\infty}[m.(m-1).(m-2)+2.m.(m-1)].(1-p)^{m-2}$, d'où :

$$E(X.Y)=\frac{p^2}{2}.(1-p).\frac{6}{(1-(1-p))^4}+p^2.\frac{2}{(1-(1-p))^3}=\frac{3.(1-p)}{p^2}+\frac{2}{p}=\frac{3-p}{p^2}.$$

Finalement : $\operatorname{cov}(X,Y)=E(X.Y)-E(X).E(Y)=\frac{3-p}{p^2}-\frac{2}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$.

e. Pour : $n\geq 2$, et sachant $(Y=n)$, X prend ses valeurs dans $\{1,\dots,n-1\}$, et :

$$P_{(Y=n)}(X=k)=\frac{P(X=k,Y=n)}{P(Y=n)}=\frac{(1-p)^{n-2}.p^2}{(n-1).(1-p)^{n-2}.p^2}=\frac{1}{(n-1)},$$

autrement dit, c'est la loi uniforme sur $\{1,\dots,n-1\}$, résultat assez cohérent puisque si : $(Y=n)$, le rang de la première réalisation avant cette 2ième réalisation est équiprobable.

85. a. Notons tout d'abord que pour tout : $n\geq 1$, et puisqu'on peut n'avoir obtenu aucun 6 dans les n premiers lancers, il semble possible d'avoir au n ième lancer un nombre de 6 compris entre 0 et N.
Procédons ensuite par récurrence.
On a : $S_1=X_1$, et X_1 compte le nombre de Succès (« obtenir un 6 ») dans la répétition (N fois en tout) d'une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Donc S_1 suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(N,\frac{1}{6}\right)$.

Supposons ainsi que pour : $n \geq 1$, S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(N, p_n)$.

Alors : $\forall\ 0 \leq p \leq N$, $(S_{n+1} = p) = \bigcup_{k=0}^{p}((S_n = k) \cap (X_{n+1} = p-k))$, et donc :

$$P(S_{n+1} = p) = \sum_{k=0}^{p} P(S_n = k).P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = p-k).$$

Or pour : $0 \leq p \leq N$, la variable aléatoire X_{n+1} suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(N-k, \frac{1}{6}\right)$ pour la probabilité conditionnelle $P_{(S_n=k)}$, car cela correspond au nombre de Succès (obtenir un 6) en lançant les $N-k$ dés restants.

Donc : $P(S_{n+1} = p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{N}{k}.p_n^k.(1-p_n)^{N-k}.\binom{N-k}{p-k}.\left(\frac{1}{6}\right)^{p-k}.\left(\frac{5}{6}\right)^{(N-k)-(p-k)}$.

Or :

- $\forall\ 0 \leq k \leq p$, $\binom{N}{k}.\binom{N-k}{p-k} = \frac{N!}{k!.(N-k)!}.\frac{(N-k)!}{(p-k)!.(N-p)!} = \frac{N!}{p!.(N-p)!}.\frac{p!}{k!.(p-k)!} = \binom{N}{p}.\binom{p}{k}$,
- $\forall\ 0 \leq k \leq p$, $p_n^k.(1-p_n)^{N-k}.\left(\frac{1}{6}\right)^{p-k}.\left(\frac{5}{6}\right)^{(N-k)-(p-k)} = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-p}.(1-p_n)^N.\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k.\left(\frac{1}{6}\right)^{p-k}$,

d'où : $P(S_{n+1} = p) = \binom{N}{p}.(1-p_n)^N.\left(\frac{5}{6}\right)^{N-p}.\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}.\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k.\left(\frac{1}{6}\right)^{p-k}$

Avec la formule du binôme, on peut alors écrire :

$$P(S_{n+1} = p) = \binom{N}{p}.(1-p_n)^N.\left(\frac{5}{6}\right)^{N-p}.\left(\frac{p_n}{1-p_n} + \frac{1}{6}\right)^p = \binom{N}{p}.\left(\frac{5}{6}\right)^{N-p}.\frac{(1-p_n)^N}{(1-p_n)^p}.\left(\frac{1+5.p_n}{6}\right)^p,$$

et comme : $1 - \frac{1+5.p_n}{6} = \frac{5-5.p_n}{6} = 5.\frac{1-p_n}{6}$,

on conclut que : $P(S_{n+1} = p) = \binom{N}{p}.\left(\frac{1+5.p_n}{6}\right)^p.\left(1-\frac{1+5.p_n}{6}\right)^{N-p}$,

et S_{n+1} suit la loi binomiale $\mathscr{B}(N, p_{n+1})$, avec : $p_{n+1} = \frac{1+5.p_n}{6}$, ce qui termine la récurrence.

b. L'événement qui nous intéresse et dont on veut la probabilité est $\bigcup_{k=1}^{+\infty}(S_k = N)$.

On peut alors remarquer que : $\forall\ n \geq 1$, $(S_n = N) \subset (S_{n+1} = N)$.

En effet, si $(S_n = N)$ est réalisé, alors tous les dés ont donné des 6 au bout de n lancers et il n'y a plus rien qui changera ensuite : en particulier on : $\forall\ k \geq n$, $S_k = S_n$, et donc : $(S_{n+1} = N)$ est réalisé.

Puis la suite $((S_n = N))_{n\geq 1}$ étant croissante au sens de l'inclusion, on a :

$$\forall\ n \geq 1,\ \bigcup_{k=1}^{n}(S_k = N) = (S_n = N),$$

et par continuité croissante : $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(S_k = N)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n = N)$.

La suite (p_n) est par ailleurs arithmético-géométrique et après étude classique, on obtient :

$$\forall\ n \geq 1,\ p_n = 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.(p_1 - 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Donc en particulier : $\forall\ n \geq 1$, $P(S_n = N) = \binom{N}{N}.p_n^N(1-p_n)^0 = \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = N) = 1$, et l'événement $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}(S_k = N)$ est presque sûrement réalisé.

c. Toujours avec les inclusions précédentes, on a : $\forall\ n \geq 1,\ (T \leq n) = \bigcup\limits_{k=1}^{n}(S_k = N) = (S_n = N)$.

Donc par incompatibilité : $\forall\ n \geq 2,\ P(T = n) = P(T \leq n) - P(T \leq n-1) = P(S_n = N) - P(S_{n-1} = N)$, soit :

- $\forall\ n \geq 2,\ P(T = n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N$,
- et en complément : $P(T = 1) = P(S_1 = N) = \frac{1}{6^N}$,

qui correspond à la valeur précédente pour : $n = 1$.

d. On utilise la deuxième expression de l'espérance.

La série $\sum\limits_{n\geq 0} P(T > n)$ converge car :

$$\forall\ n \geq 1,\ P(T > n) = 1 - P(T \leq n) = 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N = \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}.(-1)^{k+1}.\left(\frac{5}{6}\right)^{n.k},$$

autrement dit la série apparaît comme la somme de N séries géométriques convergentes.

L'égalité est encore valable pour : $n = 0$, car :

$$\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}.(-1)^k = 1 - \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}.(-1)^k = 1 - (1-1)^N = 1 = P(T > 0).$$

$$\text{Enfin : } E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) = \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}.(-1)^{k+1}.\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^n = \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}.(-1)^{k+1}.\frac{1}{1 - \frac{5^k}{6^k}} = \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}.\frac{(-1)^{k+1}.6^k}{6^k - 5^k}.$$

Fonctions génératrices.

86. a. Puisque X et Y sont à valeurs dans ℕ, Z est également à valeurs dans ℕ.

De plus : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ (Z = n) = \bigcup\limits_{k=0}^{n}((X = k) \cap (Y = n-k))$,

et par incompatibilité puis indépendance :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).P(Y = n-k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\mu}.\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}.e^{-\mu}}{n!}.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\lambda^k.\mu^{n-k},$$

soit : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(Z = n) = e^{-(\lambda+\mu)}.\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$,

autrement dit Z suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$, de paramètre $(\lambda+\mu)$.

b. Puisque :

- $\forall$ t $\in$ ℝ, $G_X(t) = e^{\lambda.(t-1)}$,
- $\forall$ t $\in$ ℝ, $G_Y(t) = e^{\mu.(t-1)}$,
- X et Y sont indépendantes,

on en déduit que : $\forall$ t $\in$ ℝ, $G_{X+Y}(t) = G_X(t).G_Y(t) = e^{\lambda.(t-1)}.e^{\mu.(t-1)} = e^{(\lambda+\mu).(t-1)}$.

On constate bien que $X + Y$ a pour fonction indicatrice la fonction indicatrice de la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$, de paramètre $\lambda+\mu$.

87. a. La fonction génératrice de cette loi (finie) est un polynôme et plus précisément :

$$\forall \text{ t} \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=2}^{12}\frac{1}{11}.t^k,$$

qu'on peut écrire sous forme de fraction pour : $t \neq 1$.

En particulier, on obtient un polynôme de degré 12 se factorisant en :

$\forall$ t $\in$ ℝ, $G(t) = t^2.\sum_{k=0}^{10} \frac{t^k}{11} = \frac{t^2}{11}.(t^{10} + ... + t + 1)$.

b. La fonction génératrice de la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est le produit des fonctions génératrices G_1 et G_2 de X_1 et X_2 (par indépendance de ces variables), et donc :

$\forall$ t $\in$ ℝ, $G_{X_1+X_2}(t) = G_1(t).G_2(t)$.

Supposons alors que la loi de $X_1 + X_2$ soit la loi uniforme sur {2, …, 12}.

Puisque G_1 et G_2 sont au plus de degré 6 et que le produit $G_{X_1+X_2}$ est de degré 12, on en déduit que G_1 et G_2 sont exactement de degré 6 et que $P(X_1 = 6)$ et $P(X_2 = 6)$ sont non nuls.

Notons alors : $\forall\ 1 \le i \le 2$, $\forall$ t $\in$ ℝ, $G_i(t) = \sum_{k=1}^{6} P(X_i = k).t^k = t.\phi_i(t)$, avec : $\deg(\phi_i) = 5$.

Puisque les polynômes ϕ_i sont de degrés impairs, ils admettent au moins chacun une racine réelle donc leur produit (qui vaut : $\forall\ t \ne 1$, $\phi_1(t).\phi_2(t) = \sum_{k=0}^{10} \frac{t^k}{11} = \frac{1}{11}.\frac{1-t^{11}}{1-t}$) admet deux racines réelles au moins.

Or ce polynôme admet pour racines les racines 11$^{\text{ièmes}}$ de l'unité autres que 1, autrement dit uniquement des racines complexes.

Conclusion : $X_1 + X_2$ ne peut avoir pour loi la loi uniforme sur {2, …, 12}.

c. Etant donné que si on lance deux dés (avec des lancers supposés indépendants), la somme des faces de ces dés est décrite par la variable aléatoire $X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 donnent les résultats des faces supérieures de dés, on ne peut donc jamais obtenir la loi uniforme sur {2, …, 12} pour loi de :

$S = X_1 + X_2$, et ceci quelle que soit la manière dont on définit les lois de X_1 et X_2.

Autrement dit, même en pipant les dés, les valeurs possibles (c'est-à-dire les valeurs de 2 à 12) de la somme des faces de ces deux dés ne pourront jamais être rendues équiprobables.

Résultats asymptotiques.

88. a. Si on développe Y^2, on obtient : $Y^2 = (X - m + \varepsilon)^2 = X^2 + 2.(m - \varepsilon).X + (m - \varepsilon)^2$,

et tous les termes qui apparaissent ont une espérance.

Donc $E(Y^2)$ existe et par linéarité de l'espérance :

$E(Y^2) = E(X^2) - 2.(m-\varepsilon).E(X) + E((m-\varepsilon)^2) = V(X) + E(X)^2 - 2.(m-\varepsilon).m + (m-\varepsilon)^2$,

soit : $E(Y^2) = \sigma^2 + m^2 - 2.(m-\varepsilon).m + (m-\varepsilon)^2 = \sigma^2 + \varepsilon^2$.

b. Puisque Y^2 admet une espérance, Y admet aussi une espérance.

De plus : $E(Y) = \sum_{y_k \in Y(\Omega)} y_k.P(Y = y_k) \le \sum_{y_k \in Y(\Omega), y_k > 0} y_k.P(Y = y_k)$,

puisque les termes oubliés dans la somme contribuent pour une part négative à l'espérance.

Or la variable aléatoire $Y.1_{Y>0}$ prend les mêmes valeurs que la variable Y en « oubliant » les valeurs négatives prises par Y.

Donc la formule de transfert donne alors : $\sum_{y_k \in Y(\Omega), y_k > 0} y_k.P(Y = y_k) = E(Y.1_{Y>0})$.

Par ailleurs, $(1_{Y>0})^2$ admet une espérance puisque c'est une variable aléatoire finie ne prenant que 2 valeurs qui sont 0 et 1, et : $E((1_{Y>0})^2) = 0.P(Y \le 0) + 1.P(Y > 0) = P(Y > 0)$.

Donc la formule de Cauchy-Schwarz montre que : $E(Y.1_{Y>0}) \le \sqrt{E(Y^2).E((1_{Y>0})^2)} = \sqrt{E(Y^2).P(Y > 0)}$,

et finalement : $E(Y) \le \sqrt{E(Y^2).P(Y > 0)}$.

c. Comme de plus, on a par linéarité de l'espérance : $E(Y) = E(X) - m + \varepsilon = m - m + \varepsilon = \varepsilon > 0$,

on peut élever au carré la dernière inégalité et :

$(E(Y))^2 \le E(Y^2).P(Y > 0)$,

d'où : $P(Y > 0) \ge \frac{(E(Y))^2}{E(Y^2)}$, c'est-à-dire : $P(X - m + \varepsilon > 0) \geq \dfrac{\varepsilon^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$,

ou encore : $P(X - m > -\varepsilon) \geq \dfrac{\varepsilon^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$.

Et avec le système complet d'événements $\{(X - m \leq -\varepsilon), (X - m > -\varepsilon)\}$,

on conclut que : $P(X - m \leq -\varepsilon) = 1 - P(X - m > -\varepsilon) \leq 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$.

d. Si on considère maintenant $-X$, on a tout d'abord : $E(-X) = -E(X) = -m$, et : $V(-X) = V(X) = \sigma^2$.

Donc : $P((-X) - (-m) \leq -\varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$,

soit : $P(-X + m \leq -\varepsilon) = P(X - m \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$.

Enfin : $(|X - m| \geq \varepsilon) = (X - m \geq \varepsilon) \cup (X - m \leq -\varepsilon)$,

et par incompatibilité : $P(|X - m| \geq \varepsilon) = P(X - m \geq \varepsilon) + P(X - m \leq -\varepsilon) \leq \dfrac{2.\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$.

e. Cette inégalité est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev lorsque : $\dfrac{2.\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2} < \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Or ceci est équivalent à : $\varepsilon^2 < \sigma^2$, soit finalement : $\varepsilon < \sigma$.