Séries Numériques (corrigé niveau 3).

Séries télescopiques.

51. a. On pense à poser : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln(n^\alpha.u_n)$.

Alors la série télescopique $\sum_{n\geq 1}(v_{n+1} - v_n)$ converge car :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \alpha.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha.\left(\frac{1}{n} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc la suite $(\ln(n^\alpha.u_n))$ converge vers une limite L et $(n^\alpha.u_n)$ tend vers : $K = e^L > 0$.

b. On constate ainsi que : $n^\alpha.u_n \underset{+\infty}{\sim} K$, donc que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}$.

Pour : $\alpha \leq 1$, la série $\sum u_n$ est donc divergente, et pour : $\alpha > 1$, elle converge.

c. • La série $\sum(-1)^n.u_n$ diverge grossièrement pour : $\alpha \leq 0$.

• Pour : $\alpha > 0$, l'égalité : $\forall\ n \geq 1,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = -\frac{\alpha}{n} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n}$,

montre qu'à partir d'un certain rang, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$, et, la suite (u_n) étant à termes positifs, cette suite est donc décroissante à partir de ce même rang.

Comme de plus l'équivalent trouvé à la question b montre que (u_n) tend vers 0, la série $\sum(-1)^n.u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées et donc est convergente pour : $\alpha > 0$.

Séries à termes positifs ou de signe constant.

52. Tout d'abord, le terme général u_n de la série est défini au moins à partir d'un certain rang puisque $\left(\frac{a}{n}\right)$ tend vers 0 et u_n est alors positif.

On peut commencer par traiter le cas :

- $a = 0$: u_n est constant égal à 1 donc la série diverge.

Pour : $a \neq 0$, on a alors :

$$u_n = \exp\left(n^b.\ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) + a.n^2\right) = \exp\left(n^b.\left(-\frac{a}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + a.n^2\right) = \exp\left(-a.n^{b-1} + a.n^2 + o_{+\infty}(n^{b-1})\right).$$

On distingue alors plusieurs cas :

- $b - 1 > 2,\ a < 0$: (u_n) tend vers $+\infty$ et la série diverge.
- $b - 1 > 2,\ a > 0$: $n^2.u_n = \exp\left(-a.n^{b-1} + a.n^2 + 2.\ln(n) + o_{+\infty}(n^{b-1})\right) = \exp\left(-a.n^{b-1} + o_{+\infty}(n^{b-1})\right)$,

tend vers 0, donc la série converge.

- $b - 1 < 2,\ a > 0$: (u_n) tend vers $+\infty$ et la série diverge.
- $b - 1 < 2,\ a < 0$: $n^2.u_n = \exp\left(-a.n^{b-1} + a.n^2 + 2.\ln(n) + o_{+\infty}(n^{b-1})\right) = \exp\left(a.n^2 + o_{+\infty}(n^2)\right)$,

tend vers 0 et la série converge.

- $b - 1 = 0$, et dans ce cas :

$$u_n = \exp\left(n^3.\ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) + a.n^2\right) = \exp\left(n^3.\left(-\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + a.n^2\right) = \exp\left(-\frac{a^2}{2}.n + o_{+\infty}(n)\right),$$

d'où : $n^2.u_n = \exp\left(-\frac{a^2}{2}.n + o_{+\infty}(n) + 2.\ln(n)\right) = \exp\left(-\frac{a^2}{2}.n + o_{+\infty}(n)\right)$,

tend vers 0 et la série converge.

53. On va là encore utiliser des développements limités :

• pour la première série, on développe $\arctan$ en 1 avec :

$\varphi(h) = \arctan(1+h)$, et : $\varphi'(h) = \dfrac{1}{1+(1+h)^2} = \dfrac{1}{2+2.h+h^2} = \dfrac{1}{2}.\left(1+h+\dfrac{h^2}{2}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2}.(1-h+o_0(h))$,

d'où : $\varphi(h) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{4} + o_0(h^2)$.

Donc : $\arctan\left(1+\dfrac{1}{n^a}\right) - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2.n^a} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^a}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2.n^a}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge si et seulement si : $a > 1$.

• pour la deuxième : $\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$, et :

$$n.\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = n.\ln\left(1-\frac{1}{2.n}+\frac{1}{24.n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n.\left(-\frac{1}{2.n}+\frac{1}{12.n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{12.n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc : $\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}.\exp\left(-\dfrac{1}{12.n}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}.\left(1-\dfrac{1}{12.n}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, et finalement :

$\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}} = -\dfrac{1}{12.n.\sqrt{e}} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12.n.\sqrt{e}}$: la série diverge.

54. Le problème ici est d'évaluer le numérateur du terme général.
Pour cela :

• si $n+1$ est un carré alors : $n+1 = p^2$, et : $n = p^2 - 1$, n'est pas un carré, donc : $\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor = p$, et : $((p-1)^2 < p^2 - 1 = n < p^2) \Rightarrow (\lfloor\sqrt{n}\rfloor = p-1)$.

Autrement dit, pour ces valeurs de n, on a : $\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = 1$.

• si $n+1$ n'est pas un carré, alors : $\exists\ p \in \mathbb{N}$, $p^2 < n+1 < (p+1)^2$, d'où : $p^2 \le n < (p+1)^2$, et : $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor = p$.

Autrement dit, pour ces valeurs de n, on a : $\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = 0$.

La série considérée est de plus à termes positifs, et la suite de ses sommes partielles est croissante.

Puis : $\forall\ p \ge 2$, $S_{p^2-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{p^2-1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$,

et dans cette somme tous les termes sont nuls sauf pour les valeurs de n s'écrivant : $n = k^2 - 1$, autrement dit :

$$S_{p^2-1} = \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}.\sum_{k=2}^{p}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}.\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{p+1}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right).$$

Donc (S_{p^2-1}) converge vers $\dfrac{3}{4}$ et comme cette suite extraite de (S_n) converge, (S_n) converge vers $\dfrac{3}{4}$.

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$ converge et a pour somme $\dfrac{3}{4}$.

55. a. Pour : $L < 1$, soit : $\varepsilon = \dfrac{1-L}{2} > 0$.

Alors : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \ge n_0$, $\left|u_n^{\frac{1}{n}} - L\right| \le \varepsilon$, et : $u_n^{\frac{1}{n}} \le \varepsilon + L = \dfrac{1+L}{2} = q < 1$, puis : $0 \le u_n \le q^n$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

b. De même dans le deuxième cas, avec : $\varepsilon = \dfrac{L-1}{2} > 0$, et : $q = \dfrac{L+1}{2} > 1$, on montre qu'à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq q^n$, et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

c. Notons u_n le terme général de cette série.

Alors : $\forall\ n \geq 2$, $\left(\dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{\ln(n)}{n}}.(\ln(n))^{-1} = \exp\left(\dfrac{(\ln(n))^2}{n} - \ln(\ln(n))\right)$,

qui tend vers 0 en $+\infty$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$ converge.

Remarques :

• si une série vérifie la règle de d'Alembert, elle vérifie la règle de Cauchy : vous pouvez essayer de démontrer ce résultat.

• la série précédente vérifie la règle de Cauchy mais la règle de d'Alembert ne donne rien : la règle de Cauchy est donc plus fine que la règle de d'Alembert (elle donne plus de résultats).

56. a. Calculons une somme partielle V_n de la deuxième série (qui est à termes positifs puisque (b_n) décroît) :

$$\forall\ N \geq 1,\ V_N = \sum_{n=1}^{N}\left((b_n - b_{n+1}).\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{b_k}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(b_n.\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{b_k}\right) - \sum_{n=1}^{N}\left(b_{n+1}.\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{b_k}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(b_n.\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{b_k}\right) - \sum_{n=2}^{N+1}\left(b_n.\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{b_k}\right),$$

et : $\forall\ n$, $0 \leq V_N = b_1.\dfrac{u_1}{b_1} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(b_n.\frac{u_n}{b_n}\right) - b_{N+1}.\sum_{k=1}^{N}\frac{u_k}{b_k} = \sum_{n=1}^{N}u_n - b_{N+1}.\sum_{k=1}^{N}\frac{u_k}{b_k} \leq U_n \leq U$.

où on a noté U_n la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de $\sum u_n$, et U sa somme.

La suite (V_n) étant croissante et majorée, elle converge.

Montrons maintenant que sa somme vaut U, autrement dit que $\left(b_{N+1}.\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{u_k}{b_k}\right)$ tend vers 0.

Pour cela, posons : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n = \dfrac{1}{b_n}$, $c_n = \beta_n - \beta_{n+1}$, $c_0 = -\beta_1$, et : $U_0 = 0$.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \beta_{k+1}).U_k = \sum_{k=1}^{n}\beta_k.U_k - \sum_{k=1}^{n}\beta_{k+1}.U_k = \sum_{k=1}^{n}\beta_k.U_k - \sum_{k=2}^{n+1}\beta_k.U_{k-1} = \beta_1.U_1 + \sum_{k=2}^{n}\beta_k.u_k - \beta_{n+1}.U_n$,

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\beta_k.u_k = \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \beta_{k+1}).U_k + \beta_{n+1}.U_n = \sum_{k=1}^{n}c_k.U_k + \beta_{n+1}.U_n$, dont on déduit que :

$$\forall\ N \geq 1,\ b_{N+1}.\sum_{k=1}^{N}\frac{u_k}{b_k} = \frac{1}{\beta_{N+1}}.\sum_{k=1}^{n}\beta_k.u_k = \frac{1}{\beta_{N+1}}.\sum_{k=1}^{N}c_k.U_k + U_N = \frac{\sum_{k=0}^{N}c_k.U_k}{-(c_0 + c_1 + \ldots + c_N)} + U_N.$$

Enfin, une version généralisée du théorème de Cesaro montre que si la suite (c_n) est positive et est telle que $(c_0 + c_1 + \ldots + c_N)$ tend vers $+\infty$, alors pour toute suite (α_n) convergeant vers L, la suite (α'_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\alpha'_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n}c_k.\alpha_k}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}$, converge aussi vers L.

Appliqué ici, on en déduit que $\left(b_{N+1}.\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{u_k}{b_k}\right)$ converge vers : $-U + U = 0$.

On vient donc de démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left((b_n - b_{n+1}).\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{b_k}\right) = \lim_{N\to+\infty}V_N = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

b. On choisit le cas particulier : $\forall\ n \geq 1$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, et on en déduit l'implication et l'égalité demandées,

puisque : $\forall\ n \geq 1$, $b_n - b_{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n.(n+1)}$, et : $\dfrac{u_k}{b_k} = k.u_k$.

c. Dans ce cas, on applique ce qu'on a obtenu à la question a à la suite : $(b_n) = (u_n)$, et on en déduit le résultat puisque : $\forall\ n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{b_k} = n$.

d. Si on suppose maintenant que la série harmonique converge (et a pour somme S), alors :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = S - 1,$$

ce qui montre que la série harmonique ne peut que diverger.

Séries de signe quelconque, somme de séries convergentes.

57. a. On calcule donc :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{2^2.(n+1)^2}{(2.n+2).(2.n+1)}\right) = \ln\left(\frac{2.n+2}{2.n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2.n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.n}.$$

La série est donc à termes positifs à partir d'un certain rang et diverge, vers +∞.

Or les sommes partielles valent : $\ln(u_0) - \ln(u_{n+1})$, donc la suite ($\ln(u_n)$) tend vers -∞ et la suite (u_n) tend vers 0.

b. De même :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ln((n+1).u_{n+1}) - \ln(n.u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2.n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2.n+1} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.n}.$$

Cette nouvelle série est divergente vers +∞ et $\ln(n.u_n)$ tend vers +∞, donc ($n.u_n$) aussi.

c. Pour : $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = \frac{(2.n+2)!}{2^{2.n+2}.(n+1)!^2}.\frac{1}{n+2} = \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.n!^2}.\frac{(2.n+1).(2.n+2)}{4.(n+1)^2.(n+2)} = \frac{u_n}{n+1}.\frac{2.n+1}{2.n+4} = \frac{2.n+1}{2.n+4}.v_n$,

d'où le résultat.

d. On somme donc les égalités précédentes de 0 à $N-1$, avec : $2.n + 4 = (2.(n+1)+1) + 1$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} (2.n+4).v_{n+1} = \sum_{n=0}^{N-1} (2.(n+1)+1).v_{n+1} + \sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1} = \sum_{n=0}^{N-1} (2.n+1).v_n\ ,$$

et : $\sum_{n=0}^{N-1} (2.(n+1)+1).v_{n+1} + \sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1} = \sum_{n=1}^{N} (2.n+1).v_n + \sum_{n=1}^{N} v_n$,

d'où : $\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} (2.n+1).v_n - \sum_{n=1}^{N} (2.n+1).v_n = v_0 - (2.N+1).v_N = 1 - \frac{2.N+1}{N+1}.u_N$,

et enfin : $\sum_{n=0}^{N} v_n = 1 + v_0 - \frac{2.N+1}{N+1}.u_N = 2 - \frac{2.N+1}{N+1}.u_N$.

e. Donc (V_N) converge vers 2 puisque (u_n) tend vers 0 et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1} = 2$.

58. La série est très simple puisque : $\forall\ n \geq 0,\ \frac{1+\sqrt{n+1}-2.\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} + \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{2^n}\right)$.

Autrement dit le terme général est la somme de celui d'une série géométrique convergente et celui d'une série télescopique également convergente.

Conclusion : la série converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n+1}-2.\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + (0-0) = 1$.

59. a. Pour n assez grand, $n-a$ et $n-b$ restent positifs et u_n garde alors un signe constant.

Quitte à changer α en $-\alpha$, on peut donc supposer que u_n reste positif à partir d'un certain rang, ce qui justifie l'existence de v_n à partir de ce rang.

Alors : $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \beta.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{b}{n}\right) + \beta.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Un développement limité donne alors : $\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)=(b-a+\beta).\frac{1}{n}-(a^2+b^2+\beta).\frac{1}{2.n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc si : $\beta\neq a-b$, la série diverge, et si : $\beta=a-b$, la série converge, par comparaison de séries de signe constant.

b. Dans ce cas, la suite ($\ln(v_n)$) converge et (v_n) converge vers une limite non nulle A, ce qui donne :

$v_n=n^{a-b}.u_n\underset{+\infty}{\sim}A$, puis : $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{A}{n^{a-b}}$.

c. La série $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge si et seulement si : $a-b>1$, par comparaison de séries de signe constant.

De plus : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $(n-b).u_{n+1}=(n-a).u_n$, donc : $(n+1).u_{n+1}-(b+1).u_{n+1}=n.u_n-a.u_n$.

Si maintenant, on somme pour n variant de 0 à N, on obtient :

$\sum_{n=0}^{N}(n+1).u_{n+1}-(b+1).\sum_{n=0}^{N}u_{n+1}=\sum_{n=0}^{N}n.u_n-a.\sum_{n=0}^{N}u_n$, soit :

$\sum_{n=1}^{N+1}n.u_n-(b+1).\sum_{n=1}^{N+1}u_n=\sum_{n=0}^{N}n.u_n-a.\sum_{n=0}^{N}u_n$, et en simplifiant :

$(N+1).u_{N+1}-(b+1).u_{N+1}+(b+1).u_0=(b+1-a).\sum_{n=0}^{N}u_n$.

Enfin, si on fait tendre N vers +∞, u_{N+1} tend vers 0 ainsi que $(N+1).u_{N+1}$, du fait de l'équivalent et :

$(b+1-a).\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=(b+1).\alpha$, d'où : $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\frac{b+1}{b+1-a}.\alpha$.

Séries alternées, et autour des séries alternées.

60. • La première série est simple puisque :

$$\frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}=\frac{(-1)^n}{n}.\left(1-\frac{\ln(n)}{n}\right)^{-1}=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n.\ln(n)}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

Deux termes de séries apparaissent, le premier pour une série alternée qui converge avec le critère spécial, le deuxième pour une série absolument convergente (série de Bertrand ou $o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$).

• Pour la deuxième, on commence par la racine et :

$\sqrt{n^2+(-1)^n}=n.\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=n+\frac{(-1)^n}{2.n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où :

$$\sin(2.\pi.\sqrt{n^2+(-1)^n})=\sin\left(2.\pi.n+\frac{(-1)^n.\pi}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\sin\left(\frac{(-1)^n.\pi}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{(-1)^n.\pi}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme somme de deux séries convergente (la première par le critère spécial, la deuxième parce que son terme général est négligeable devant celui d'une série absolument convergente), la série converge.

61. a. Il est immédiat que E est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles, non vide car contenant la suite nulle et stable par combinaison linéaire.

On pourrait utiliser un isomorphisme pour obtenir la dimension ou une base de E, mais on peut simplement vérifier que les deux suites proposées à la question b en constituent une base.

En effet, elles forment une famille libre puisque :

$\alpha.(a_n)+\beta.(b_n)=0$, entraîne en particulier : $\alpha.a_0+\beta.b_0=0=\alpha$, et : $\alpha.a_1+\beta.b_1=0=\beta$.

b. En fait elles ne sont croissantes qu'à partir du rang 1.

Il suffit pour cela de remarquer qu'elles sont positives (immédiat par récurrence) et que :

$\forall\ n\geq 1$, $a_{n+1}-a_n=n.a_n+a_{n-1}-a_n=(n-1).a_n+a_{n-1}\geq 0$,

de même pour (b_n).

De plus on a : $a_2=1=b_2$, donc puisqu'elles sont croissantes, elles vérifient également :

$\forall\ n \geq 2,\ a_{n+1} = n.a_n + a_{n-1} \geq n.a_2 \geq n$,

de même pour (b_n) et elles tendent donc bien vers $+\infty$.

c. Comme demandé :

$\forall\ n \geq 1,\ w_n = a_{n+1}.b_n - a_n.b_{n+1} = (n.a_n + a_{n-1}).b_n - a_n.(n.b_n + b_{n-1}) = -(a_n.b_{n-1} - a_{n-1}.b_n) = -w_{n-1}$.

Et comme : $w_0 = -1$, on en déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_n = (-1)^{n+1}$.

d. On a donc : $\forall\ n \geq 1,\ c_{n+1} - c_n = \dfrac{w_n}{b_n.b_{n+1}} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{b_n.b_{n+1}}$,

et la série est alternée puisque (b_n) est positive.

De plus (b_n) est croissante donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ b_n.b_{n+1} \geq b_n.b_{n-1}$ bn.,

et la série $\sum_{n\geq 1}(c_{n+1} - c_n)$ vérifie le critère spécial des séries alternées et à ce titre converge.

e. On peut écrire (à l'aide de sommes partielles au besoin) : $L - c_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(c_{k+1} - c_k)$,

et le critère spécial donne encore : $|L - c_n| \leq |c_{n+1} - c_n| = \dfrac{1}{b_n.b_{n+1}}$.

Puis, pour un réel α donné, on a : $\forall\ n \geq 1,\ a_n + \alpha.b_n = b_n.(c_n + \alpha)$,

et comme (b_n) tend vers $+\infty$, il est nécessaire que $(c_n + \alpha)$ tende vers 0, donc que : $\alpha = -L$.

Réciproquement, pour cette valeur de α, on a alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |a_n - L.b_n| = b_n.|c_n - L| \leq \dfrac{1}{b_{n+1}}$,

qui tend bien vers 0.

Conclusion : $-L$ est l'unique valeur de α pour laquelle la suite proposée tend vers 0.

62. Un développement limité à l'ordre 2 montre immédiatement la convergence de la série.

Puis : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{2.N}\ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\ln\left(1 - \dfrac{1}{2.n}\right) + \sum_{n=1}^{N}\ln\left(1 + \dfrac{1}{(2.n-1)}\right)$, en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans cette somme finie.

Et comme les deux logarithmes (pour un même n) sont opposés, on déduit : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*,\ S_{2.N} = 0$.

Donc puisque la série converge $(S_{2.N})$ converge vers la somme de la série on a : $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = 0$.

Vrai-faux.

63. La première affirmation est vraie, la deuxième est fausse.

En effet :

• si $\sum a_n$ est convergente, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$, alors avec l'inégalité : $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ 2.\alpha.\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$,

on en déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \dfrac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \dfrac{1}{2}.\left(a_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$,

et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

• la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ converge alors que la série : $\sum_{n\geq 1}(-1)^n.\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 = \sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$, diverge.

Autour de la série harmonique.

64. a. On calcule donc : $\forall\ n \geq 1,\ \ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n}[\ln(a + k - 1) - \ln(k)] = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \dfrac{a-1}{k}\right)$,

qui correspond donc à la somme partielle d'une série.

On distingue alors trois cas :

- $a>1$: le terme général de la série vérifie : $\ln\left(1+\dfrac{a-1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a-1}{k}$,

et par comparaison de séries à termes positifs, la série diverge vers +∞ donc la suite ($\ln(u_n)$) aussi, ainsi que (u_n).

- $a<1$: de même, mais par comparaison de séries à termes négatifs, la série diverge vers -∞, tout comme ($\ln(u_n)$) et (u_n) tend vers 0.
- $a=1$: la suite (u_n) est constante égale à 1 et converge vers 1.

b. La divergence de la série est immédiate pour : $a\geq 1$, par divergence grossière.

Pour : $0<a<1$, on a : $\ln\left(1+\dfrac{a-1}{k}\right) = \dfrac{a-1}{k} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{(a-1)^2}{k^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, et :

$$\ln(n.u_n) = (a-1).\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} v_k + \ln(n) = (a-1).[\ln(n)+\gamma+\varepsilon(n)] + V + \varepsilon(n) + \ln(n) = a.\ln(n) + C + \varepsilon(n),$$

où v_n est le terme général d'une série convergente, V sa somme et C une constante.

La suite ($n.u_n$) tend donc vers +∞.

Donc : $\exists\ n_0 \in$ ℕ*, $\forall\ n\geq n_0$, $n.u_n\geq 1$, soit : $u_n \geq \dfrac{1}{n}$, et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

65. a. La suite (H_n) tend vers +∞.

Donc pour tout réel, il existe un rang à partir duquel H_n devient supérieur à ce réel.

Autrement dit : $\forall\ p \in$ ℕ, $\{n \in$ ℕ*, $H_n \geq p\}$ est non vide et admet donc un plus petit élément.

En particulier, les premiers termes de la suite H_n valant : 1, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{11}{6}$, $\dfrac{25}{12}$, etc…, on a :

- $n_0 = \min\{n \in$ ℕ*, $H_n \geq 0\}$ = 1,
- $n_1 = \min\{n \in$ ℕ*, $H_n \geq 1\}$ = 1,
- $n_2 = \min\{n \in$ ℕ*, $H_n \geq 2\}$ = 4,
- $n_3 = \min\{n \in$ ℕ*, $H_n \geq 3\}$ = 11, car : $H_{10} = \dfrac{7381}{2520} < 2.93$, $H_{11} = \dfrac{83711}{27720} > 3.01$.

b. La suite (n_p) est une suite croissante d'entiers, puisque (H_n) est croissante.

En effet : $\{n \in$ ℕ*, $H_n \geq p+1\} \subset \{n \in$ ℕ*, $H_n \geq p\}$, et : $n_{p+1}\geq n_p$.

Elle est évidemment non majorée sinon on aurait :

$\exists\ N \in$ ℕ*, $\forall\ p \in$ ℕ*, $n_p\leq N$, et : $\forall\ n\geq N$, $H_n \geq p$, ce qui est impossible.

Donc (n_p) tend vers +∞.

c. Enfin : $H_n = \ln(n)+\gamma+o_{+\infty}(1)$, donc en particulier :

$H_{n_p} = \ln(n_p)+\gamma+o_{+\infty}(1) \geq p$, par définition de n_p, et :

$H_{n_p-1} = \ln(n_p-1)+\gamma+o_{+\infty}(1) \leq p$, puisque n_p est le plus petit des entiers définis par l'inégalité précédente.

On déduit de ce qui précède que : $(n_p-1).e^{\gamma}.e^{o_{+\infty}(1)} \leq e^p \leq n_p.e^{\gamma}.e^{o_{+\infty}(1)}$,

ou encore : $e^p.e^{-\gamma}.e^{o_{+\infty}(1)} \leq n_p \leq e^p.e^{-\gamma}.e^{o_{+\infty}(1)}+1$,

et finalement : $e^{o_{+\infty}(1)} \leq \dfrac{n_p}{e^{p-\gamma}} \leq e^{o_{+\infty}(1)} + e^{\gamma}.e^{-p}$.

Et puisque (e^p) tend vers +∞, on conclut que : $n_p \underset{+\infty}{\sim} e^{p-\gamma}$.

Sommation par paquets.

66. a. On remarque tout d'abord que : $\forall\ n \geq 1$, $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{2.n+1} u_k = U_{2.n+1} - u_1$, et : $U_{2.n+2} = u_1 + V_n + u_{2.n+2}$.

Donc :

- si (U_n) converge, alors (V_n) converge avec la première relation,
- si (V_n) converge, alors ($U_{2.n+1}$) converge (1ère relation) et ($u_{2.n+2}$) tendant vers 0, ($U_{2.n}$) converge vers la même limite (2ème relation), donc finalement (U_n) converge.

b. Il suffit d'écrire : $\forall\ n \geq 1$,

$$u_{2.n} + u_{2.n+1} = \frac{\sin(\ln(2.n))}{2.n} - \frac{\sin(\ln(2.n+1))}{2.n+1} = \frac{1}{2.n.(2.n+1)}.[(2.n+1).\sin(\ln(2.n)) - 2.n.\sin(\ln(2.n+1))],$$

donc : $v_n = \dfrac{\sin(\ln(2.n))}{2.n.(2.n+1)} + w_n$, avec : $w_n = \dfrac{d_n}{n.(n+1)}$,

et où : $d_n = 2.n.\sin(\ln(2.n)).\left[1 - \cos\left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{2.n}\right)\right)\right] - 2.n.\sin\left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{2.n}\right)\right).\cos(\ln(2.n))$.

c. Dans d_n, on constate alors que :

- le premier terme de cette quantité est équivalent à : $\sin(\ln(2.n)).\dfrac{1}{4.n}$, donc est borné,
- le deuxième est équivalent à : $-\cos(\ln(2.n))$, donc est borné.

Donc $|w_n|$ est majoré par une quantité du type $\dfrac{A}{2.n.(2.n+1)}$, et la série est absolument convergente.

Puisque de plus la série $\sum \dfrac{\sin(\ln(2.n))}{2.n.(2.n+1)}$ est également absolument convergente, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge et finalement la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ aussi.

67. La première étape dans cet exercice est d'écrire son terme général.
Puisque pour les termes d'indices impairs, il y a p termes de la série harmonique et q pour les termes d'indices pairs, on constate (après d'éventuels essais) que :

$\forall\ n \geq 0$, $a_{2.n+1} = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{2.n.p + 2.k - 1} = \sum_{k=n.p}^{(n+1).p-1} \dfrac{1}{2.k+1}$, et :

$\forall\ n \geq 1$, $a_{2.n} = -\sum_{k=1}^{q} \dfrac{1}{2.(n-1).q + 2.k} = -\dfrac{1}{2}.\sum_{k=(n-1).q+1}^{n.q} \dfrac{1}{k}$.

On peut évidemment démontrer correctement ce résultat par récurrence (ce qui ne présente pas de difficulté).

Puis : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $A_{2.N} = \sum_{n=1}^{2.N} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_{2.n} + \sum_{n=0}^{N-1} a_{2.n+1} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n.p}^{(n+1).p-1} \dfrac{1}{2.k+1} - \dfrac{1}{2}.\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=(n-1).q+1}^{n.q} \dfrac{1}{k}$,

soit : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $A_{2.N} = \sum_{n=1}^{2.N} a_n = \sum_{k=0}^{N.p-1} \dfrac{1}{2.k+1} - \dfrac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N.q} \dfrac{1}{k} = \left(H_{2.N.p} - \dfrac{1}{2}.H_{N.p}\right) - \dfrac{1}{2}.H_{N.q}$.

Dans la première somme, on a en effet fait apparaître tous les termes de la série harmonique jusqu'à l'indice $2.N.p$ en enlevant ensuite les indices pairs jusqu'à cette valeur (pour ne garder que les impairs).
Par ailleurs :

$\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $A_{2.N+1} = \sum_{n=1}^{2.N+1} a_n = \sum_{n=1}^{2.N} a_n + a_{2.N+1} = A_{2.N} + a_{2.N+1}$.

Or : $0 \leq a_{2.N+1} = \sum_{k=n.p}^{(N+1).p-1} \dfrac{1}{2.k+1} \leq p.\dfrac{1}{2.N.p+1} \leq \dfrac{1}{2.N}$,

et ($a_{2.N+1}$) tend vers 0.

Donc la convergence de (A_N) se ramène à celle de ($A_{2.N}$).

Enfin : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*,\ A_{2.N} = \left(\ln(2.N.p) + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}.(\ln(N.p) + \gamma + o_{+\infty}(1))\right) - \frac{1}{2}.(\ln(N.q) + \gamma + o_{+\infty}(1))$.

Après simplification : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*,\ A_{2.N} = \ln(2) + \frac{1}{2}.\ln(p) - \frac{1}{2}.\ln(q) + o_{+\infty}(1)$,

d'où finalement $\sum a_n$ converge et : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln\left(2.\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

68. a. On peut écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{j}{\sqrt{3.n+1}} = \frac{j}{\sqrt{3.n}}.\left(1 + \frac{1}{3.n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{j}{\sqrt{3.n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right),$$

et : $\frac{j^2}{\sqrt{3.n+2}} = \frac{j^2}{\sqrt{3.n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_{3.n} + u_{3.n+1} + u_{3.n+2} = \frac{1 + j + j^2}{\sqrt{3.n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

Donc la série de terme général $(u_{3.n} + u_{3.n+1} + u_{3.n+2})$ est convergente.

b. Comme de plus (u_n) tend vers 0, les trois suites de sommes partielles $(U_{3.n})$, $(U_{3.n+1})$ et $(U_{3.n+2})$ ont même nature et la suite $(U_{3.n+2})$ convergeant d'après la question précédente, la série $\sum u_n$ converge.

Transformation d'Abel.

69. a. Cette relation se montre par exemple par récurrence sur p.

Elle est vraie pour : $p = 1$ (avec la convention qu'une somme dont l'indice terminal est strictement plus petit que l'indice initial est vide est vaut 0).

Si de plus, on la suppose vraie pour un p donné, $p \geq 1$, alors :

$$u_{p+1}.\sigma_{p+1} + \sum_{k=1}^{p}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k = u_p.\sigma_p + \sum_{k=1}^{p-1}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k + (u_{p+1}.\sigma_{p+1} - u_p.\sigma_p) + (u_p - u_{p+1}).\sigma_p.$$

Or les termes supplémentaires se réduisent à :

$$(u_{p+1}.\sigma_{p+1} - u_p.\sigma_p) + (u_p - u_{p+1}).\sigma_p = u_{p+1}.(\sigma_{p+1} - \sigma_p) = u_{p+1}.v_{p+1},$$

d'où : $u_{p+1}.\sigma_{p+1} + \sum_{k=1}^{p}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k = \sum_{k=1}^{p} u_k.v_k + u_{p+1}.v_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} u_k.v_k$,

ce qui termine la récurrence.

b. On étudie alors la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n.v_n$.

Or :

- $(u_{p+1}.\sigma_{p+1})$ tend vers 0 comme produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0.
- si on note M un majorant de $(|\sigma_p|)$, alors :

$$\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{p}|(u_k - u_{k+1}).\sigma_k| \leq \sum_{k=1}^{p}(u_k - u_{k+1}).M = M.(u_1 - u_{p+1}),$$

puisque (u_n) est décroissante.

Enfin, la série $\sum(u_k - u_{k+1}).\sigma_k$ converge absolument car la suite (u_p) converge.

Finalement, la série $\sum u_n.v_n$ converge.

c. La première série est convergente, à l'aide de cette transformation.

En effet, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroît vers 0, et :

$$\forall\ n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{n}\cos(k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=2}^{n} e^{i.k}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2.i}.\frac{1 - e^{(n-1).i}}{1 - e^{i}}\right),$$

d'où : $\forall\ n \geq 2$, $\left|\sum_{k=2}^{n} \cos(k)\right| \leq \left|\mathrm{Re}\left(e^{2.i}.e^{i.\frac{(n-2).i}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{(n-1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\right| \leq \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$,

et la suite de ces sommes partielles est bornées.

Pour la deuxième, le terme général doit tout d'abord tendre vers 0 pour qu'il y ait convergence et il est alors nécessaire que : $\alpha > 0$.

Pour : $\alpha > 1$, on a absolue convergence de la série.

Enfin,

- pour : $0 < \alpha \leq 1$, et : $\theta = 0\ (2.\pi)$, la série diverge (série de Riemann),
- pour : $0 < \alpha \leq 1$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$ décroît vers 0, et :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} e^{i.k.\theta} = e^{i.\theta}.\dfrac{1-e^{i.n.\theta}}{1-e^{i.\theta}}$, d'où : $\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i.k.\theta}\right| \leq \dfrac{2}{\left|1-e^{i.\theta}\right|}$,

et cette suite est bornée.

La transformation d'Abel garantit alors la convergence de la série.

Remarque : l'exercice 40 est un cas particulier de cette transformation.