Réduction d'endomorphismes.

Exercices 2017-2018

Niveau 1.

Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

1. A l'aide de son polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall\ P \in \mathbb{R}[X]$, $u(P) = X.P - (1-X)^2.P'$.
   a. Montrer qu'un éventuel vecteur propre est de degré 1.
   b. Montrer que : $\forall\ P \in \mathbb{R}_1[X]$, $u(P) \in \mathbb{R}_1[X]$, et en notant u_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ induit par u, donner la matrice de u_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.
   c. En déduire les valeurs et les vecteurs propres de u_1 puis ceux de u.

3. Soit : $E = \mathbb{R}_n[X]$, et u et v les endomorphismes de E définis par :
   $\forall\ P \in E$, $u(P) = P - (X-1).P'$, et : $v(P) = (X^2 - 1).P'' + 2.X.P'$.
   a. Justifier que u et v sont bien des endomorphismes de E.
   b. A l'aide de la matrice de u et de v dans la base canonique de E, trouver les valeurs propres de ces endomorphismes (on ne cherchera pas les vecteurs propres).
   c. Quelle est la dimension des espaces propres de u et de v ?
   d. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisables ?

4. Soit u un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.
   a. Montrer que : ($\exists$ k $\in \mathbb{N}^*$, $0 \in Sp(u^k)$) $\Rightarrow$ ($0 \in Sp(u)$)).
   b. Montrer que : ($0 \notin Sp(u)$) $\Leftrightarrow$ (u surjectif).

5. Soient A et B des matrices respectivement dans $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**) et $\mathcal{M}_{p,n}$(**K**).
   Pour x réel, on définit les matrices par blocs : $M = \begin{pmatrix} x.I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}$, $T_1 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ B & I_p \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ B & -x.I_p \end{pmatrix}$
   a. En étudiant les produits $M.T_1$ et $T_2.M$, montrer que : $x^p.\chi_{A.B}(x) = x^n.\chi_{B.A}(x)$.
   b. En déduire, si A et B sont des matrices carrées de $\mathcal{M}_n$(**K**), que : $\chi_{A.B} = \chi_{B.A}$.

6. Soit u un automorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.
   a. Etablir un lien, pour x non nul, entre $\chi_{u^{-1}}(x)$ et $\chi_u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   b. Comparer de même $Sp(u)$ et $Sp(u^{-1})$.

Diagonalisation, trigonalisation.

7. Etudier la diagonalisabilité de la matrice : $A_1 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Soient : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et : $\forall\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
   a. Déterminer les valeurs propres de A.

Montrer qu'il existe : $P \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, et : $D \in \mathrm{Diag}_3(\mathbb{R})$, telles que : $A = P.D.P^{-1}$.

b. Calculer A^2.

En déduire que K est diagonalisable au moyen de la même matrice P, puis préciser : $\Delta = P^{-1}K.P$.

c. Sans calculs, montrer que : $\forall\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $M(a,b,c)$,est diagonalisable.

Préciser ses valeurs propres ainsi que son déterminant.

9. Pour quelles valeurs de : $m \in \mathbb{R}$, la matrice : $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ m-2 & 2-m & m \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

10. Soit : $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}$, et : $n \geq 3$.

a. Montrer que A a exactement 3 valeurs propres distinctes.

b. A est-elle diagonalisable ?

11. Soient : E = $\mathbb{R}_n[X]$, et u l'application définie sur E par : $\forall\ P \in$ E, $u(P) = X.(X-1).P' - n.X.P$.

a. Vérifier que : $u \in \mathcal{L}$(E).

b. Soient : $\lambda \in \mathbb{R}$, et : $P \in$ E.

Montrer que : $u(P) = \lambda.P$, si et seulement si P est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

(E_λ) $\quad x.(x-1).y' - (n.x+\lambda).y = 0$.

c. Justifier qu'une fonction polynôme est solution de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est sur]1,+∞).

d. Résoudre (E_λ) sur]1,+∞).

e. Montrer que (E_λ) admet des solutions polynomiales non nulles de degré inférieur ou égal à n si et seulement si λ est un entier négatif compris entre $-n$ et 0.

f. En déduire que : $Sp(u) = \{-n, \ldots, -1, 0\}$.

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

12. Soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec : $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

13. Soit : $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, défini par : $\forall\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\phi(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

ϕ est-il diagonalisable ?

14. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes, telles que : $A.B = B.A$.

On suppose de plus que B admet n valeurs propres distinctes, et on notera u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et à B.

a. Montrer que tout vecteur propre de B est vecteur propre de A.

b. Montrer à l'aide de u et de v que A et B diagonalisent par l'intermédiaire d'une même matrice P.

c. Montrer que : $\exists\ (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $A = \alpha_0.I_n + \alpha_0.B + \ldots + \alpha_{n-1}.B_{n-1}$.

15. Soit u un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose que : $\mathrm{Im}(u + id_E) \cap \mathrm{Im}(u - id_E) = \{0\}$.

A l'aide du théorème du rang, montrer que u est diagonalisable et préciser dans la mesure du possible ses valeurs propres.

16. Trigonaliser les matrices : $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, et : $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On pourra utiliser dans chaque cas l'endomorphisme canoniquement associé.

Utilisation de la diagonalisabilité.

17. Calculer A^n dans les cas suivants :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Soit : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $Sp(A) = \{-2,3,5\}$.

Exprimer A^n en fonction de I_3, A, A^2, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}$.

19. Soit : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, telle que : $tr(A) = tr(A^2) = 0$.

a. En utilisant le fait que A est trigonalisable (à justifier), montrer que : $\det(I_3 + A^2) = 1 + (\det(A))^2$.

b. Que faire si on suppose que : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

20. Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie : $n \geq 1$.

a. Montrer que : $\ker(u) = \ker(u^2)$.

b. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.

21. Soient (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4.u_{n+1} - 3.u_n$, et : $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, pour : $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer qu'il existe une matrice carrée A, telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A.U_n$.

b. Diagonaliser la matrice A, et en déduire la valeur de u_n pour tout entier n.

22. Etudier les trois suites récurrentes liées par les relations suivantes :

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 22 \\ z_0 = 22 \end{cases}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}.(2.x_n + y_n + z_n)$, $y_{n+1} = \frac{1}{3}.(x_n + y_n + z_n)$, $z_{n+1} = \frac{1}{4}.(x_n + y_n + 2.z_n)$.

23. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} + 4.u_{n+2} + 5.u_{n+1} + 2.u_n = 0$.

Pour tout entier n, on note X_n la matrice colonne de coefficients u_n, u_{n+1}, u_{n+2}.

a. Déterminer une matrice : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A.X_n$.

b. Exprimer u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et : $n \in \mathbb{N}$.

24. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice : $P \in Gl_2(\mathbb{R})$, et une matrice diagonale réelle D telles que : $D = P^{-1}.A.P$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 + M = A$ (E).

b. Montrer que la matrice : $N = P^{-1}.M.P$, vérifie : $N^2 + N = D$, puis que N commute avec D.
En déduire que $P^{-1}.M.P$ est diagonale.

c. Résoudre l'équation (E).

25. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer les solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation : $M^2 = A$.

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

26. Soit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que si P est le polynôme caractéristique de A, on a bien : $P(A) = 0$.

b. Déterminer le polynôme de plus bas degré normalisé vérifiant l'égalité précédente.
Le polynôme que l'on obtient ainsi s'appelle le polynôme minimal de A.

27. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $A^4 = 7.A^3 - 12.A^2$.

a. Déterminer les seules valeurs propres complexes possibles de A.

b. En déduire que : $tr(A) \in \mathbb{N}$, et : $tr(A) \leq 4.n$.

28. Soit : $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension 3.
On suppose que : $f^4 = f^2$, et que 1 et -1 sont valeurs propres de f.
Montrer que f est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas).

29. Montrer qu'il n'existe pas de matrice dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ dont un polynôme annulateur est :
$P = X^4 + X^3 + 2.X^2 + X + 1$.

30. Soit : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $A^3 = I_3$, et : $A \neq I_3$.

a. Déterminer les valeurs propres réelles de A.

b. Déterminer les valeurs propres complexes de A et leurs multiplicités.

c. A est-elle diagonalisable ?

31. Soit : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $M^2 + {}^tM = 2.I_n$.

a. Trouver un polynôme annulateur pour M.

b. En déduire que M est diagonalisable.

32. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et : $p \in \mathcal{L}(E)$, tel que p^2 soit un projecteur.

a. Quelles sont les valeurs propres possibles pour p ?

b. Montrer que p est diagonalisable si et seulement si : $p^3 = p$.

33. Soient : $n \geq 2$, et : $A = (\delta_{i,j+1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $\delta_{a,b}$ désigne le symbole de Kronnecker.

a. Montrer que A est nilpotente et déterminer le plus petit entier p tel que : $A^p = 0$.
On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à A.

b. Existe-t-il une matrice B telle que : $B^2 = A$?
On pourra être amené à distinguer les cas n pair et n impair.

34. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que u admet une unique valeur propre λ.

a. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

b. A quelle condition u est-il diagonalisable ?

c. Justifier que $u - \lambda.id_E$ est nilpotent.

35. Soit u un automorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que u^{-1} est un polynôme en u.

36. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et : $u \in \mathscr{L}$(E), diagonalisable.
On pose : $\forall\ n \geq 0,\ g_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}$.
Montrer qu'il existe : $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall\ n \geq n_0,\ g_n$ est inversible.
On pourra utiliser le fait que : $\forall\ z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \neq 0$.

Sous-espaces vectoriels stables.

37. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie qui commutent.
a. Justifier que u admet au moins une valeur propre.
b. En déduire que u et v ont au moins un vecteur propre commun.

38. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et soit : $u \in \mathscr{L}$(E).
On suppose qu'il existe : $x_0 \in$ E, tel que : $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
a. Montrer que E est le seul sous-espace vectoriel de E, stable par u qui contienne x_0.
Enoncer une réciproque.
b. Justifier qu'il existe : $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in$ **K**^{n}, tel que : $u^n(x_0) = \alpha_0.x_0 + \alpha_1.u(x_0) + ... + \alpha_{n-1}.u^{n-1}(x_0)$.
Montrer que : $u^n = \alpha_0.id_E + \alpha_1.u + ... + \alpha_{n-1}.u^{n-1}$.

39. Soit : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par u et u_F l'endomorphisme induit par u dans F.
a. Justifier que u_F est diagonalisable.
Que peut-on dire des vecteurs propres de u_F ?
b. En déduire que F admet une base formée de vecteurs propres de u.
c. Déterminer tous les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

40. Soit u un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie n.
a. Soit λ une valeur propre de u et E_λ le sous-espace propre associé.
Donner la matrice de u dans une base adaptée à E_λ et en déduire que la dimension de E_λ est inférieure ou égale à la multiplicité de λ.
b. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

<u>Niveau 2.</u>

Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

41. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice : $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}$.

42. a. Montrer qu'une symétrie d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable.
b. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_{2.n+1}[X]$ dans lui-même définie par : $\forall\ P \in \mathbb{R}_{2.n+1}[X],\ \phi(P) = X^{2.n+1}.P\left(\frac{1}{X}\right)$.
Montrer que : $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2.n+1}[X])$.
Montrer que ϕ est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres.

43. Matrices compagnes.

Soit : $P = X^n - (a_{n-1}.X^{n-1} + ... + a_1.X + a_0) \in$ **K**[X], et soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

a. Montrer que P est le polynôme caractéristique de A.

b. Soit : $\lambda \in Sp(A)$.

Déterminer $rg(A - \lambda.I_n)$ et en déduire la dimension du sous-espace propre associé à λ.

c. Donne une condition nécessaire et suffisante portant sur P pour que A soit diagonalisable.

d. Montrer que si : $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) = (1,2,...,n)$, alors la matrice A obtenue a, dans l'intervalle]0,+∞), une unique valeur propre . .

44. Soit : E = $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour : $f \in$ E, on note : $u(f) = f'$.

Déterminer les éléments propres de u et montrer en particulier que tout sous-espace propre de u est de dimension 1.

45. Soit : E = $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Soit ϕ l'application de E dans E qui à f dans E associe g définie par : ∀ x ∈ ℝ, $g(x) = f'(x) - x.f(x)$.

a. Montrer que : $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de ϕ.

c. Déterminer $\ker(\phi^2)$.

46. Matrices stochastiques.

On dit qu'une matrice : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est stochastique si elle vérifie les conditions :

- $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}^+$,
- $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Soit A une matrice stochastique.

a. Montrer que 1 est valeur propre de A.

b. On suppose que λ est une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre de A associé à λ..

On appelle i_0 un entier entre 1 et n, tel que : $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Justifier que i_0 existe, que : $|x_{i_0}| \neq 0$, puis que : $|\lambda| \leq 1$.

47. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, telles que : $A.B - B.A = A$.

a. Calculer $A^k.B - B.A^k$, pour : $k \in \mathbb{N}$.

b. On suppose que A n'est pas nilpotente.

Montrer alors que l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ défini par : $M \mapsto M.B - B.M$, admet une infinité de valeurs propres.

c. En déduire que A est nilpotente.

48. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $u(P) = (X+1).(X-3).P' - 2.X.P$.

a. Est-ce bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit λ un réel et P un polynôme.

b. Montrer que : $u(P) = \lambda.P$, si et seulement si P est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

c. Résoudre cette équation différentielle et trouver une condition sur λ pour qu'elle admette des solutions polynomiales.

d. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

e. Généraliser avec $\mathbb{R}_n[X]$.

49. Soit : $A=\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $a_1,...,a_n$ des complexes deux à deux distincts, non nuls.

On pose : $\forall\ x\in \mathbb{R},\ P(x)=\det(A+x.I_n)$.

a. Calculer $P(a_i)$, pour : $1\le i\le n$.

b. Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)}$.

c. En déduire $\det(A)$ et $\det(A+I_n)$.

Diagonalisation, trigonalisation.

50. Soit, pour n entier, l'application u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, qui à A fait correspondre sa transposée. Etudier la diagonalisabilité de u.

51. Soit : $A=\begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En distinguant trois cas, étudier si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

52. Trigonaliser les matrices : $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

53. Soit : $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer avec des arguments simples (sans le polynôme caractéristique) que A est diagonalisable.

54. Soit A une matrice de rang 1.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si : $tr(A)\ne 0$.

55. Soient : $A=\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$, et : $B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B sont semblables.

56. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit : $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ une base de E, et soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall\ 1\le i\le n,\ f(e_i)=e_i+\sum_{k=1}^{n}e_k$.

a. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b. Trouver deux valeurs propres « simples » de f et les sous-espaces propres associés.
En déduire les éléments propres de f.

c. f est-il diagonalisable ?

f est-il inversible ?

57. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et soit : $f \in \mathscr{L}(E)$.
On note ϕ l'application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ définie par : $\forall\ g \in \mathscr{L}(E)$, $\phi(g) = fog - gof$.
Si f est diagonalisable, montrer à l'aide d'une base de E formée de vecteurs propres de f que ϕ est aussi diagonalisable.

58. Pour : $(a,b) \in \mathbf{K}^2$, on note A la matrice : $A_{2.n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & .\cdot^{\cdot} & .\cdot^{\cdot} & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & .\cdot^{\cdot} & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & .\cdot^{\cdot} & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & .\cdot^{\cdot} & .\cdot^{\cdot} & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2.n+1}(\mathbf{K})$.
Etudier si A est diagonalisable ou trigonalisable.

Utilisation de la diagonalisabilité.

59. Soit l'équation : $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue : $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
a. Si M est solution de cette équation, justifier M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
b. Trouver les solutions de l'équation initiale en utilisant un polynôme annulateur.

60. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et : $u \in \mathscr{L}(E)$, admettant n valeurs propres distinctes.
On considère l'équation d'inconnue : $g \in \mathscr{L}(E)$, $g^2 = u$.
a. Préciser la dimension des espaces propres de u.
b. Montrer que si g est solution du problème, alors u et g commutent.
c. En déduire que dans ce cas, les vecteurs propres de u sont vecteurs propres de g.
d. Déterminer le nombre de solutions de l'équation précédente.

61. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : $\forall\ x \in \mathbb{C} \setminus Sp(A)$, $tr((x.I_n - A)^{-1}) = \dfrac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)}$.

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

62. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $A^3 = A + I_n$.
Montrer que : $\det(A) > 0$.

63. On veut résoudre dans $\mathscr{M}_5(\mathbb{C})$ l'équation : $A^5 = I_5$.
a. Montrer qu'une solution de cette équation est nécessairement diagonalisable.
b. Résoudre l'équation.

64. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $\forall\ 1 \le i, j \le n$, $a_{i,j} = \alpha_i.\alpha_j$, où : $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.
Calculer A^2 et en déduire si A est diagonalisable (on distinguera deux cas).

65. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et p un projecteur de E.
On appelle Φ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ qui à u fait correspondre pou.
a. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de Φ.
b. Est-il diagonalisable ?

66. Soit u l'endomorphisme de **K**[X] qui à P associe P(2.X).
   a. Justifier que u est un automorphisme de **K**[X], et déterminer ses valeurs propres.
   b. Peut-on trouver : $Q \in$ **K**[X], tel que : $u^{-1} = Q(u)$?

67. Soient λ et μ deux complexes distincts non nuls, et soient M, A, B trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :
   $I_n = A + B$,
   $M = \lambda.A + \mu.B$,
   $M^2 = \lambda^2.A + \mu^2.B$.
   a. En calculant $M^2 - (\lambda+\mu).M + \lambda.\mu.I_n$, montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
   b. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
   c. Montrer que M est diagonalisable et déterminer son spectre.

68. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   a. En utilisant le fait que B est trigonalisable, montrer que A et B n'ont pas de valeur propre en commun si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.
   b. On suppose qu'il existe une matrice : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \neq 0$, telle que : $A.M = M.B$
   Montrer que : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $A^k.M = M.B^k$, puis que : $\forall\ P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A).M = M.P(B)$.
   En déduire que A et B ont une valeur propre en commun.
   c. Réciproquement, montrer que si A et B ont une valeur propre λ en commun, alors :
   $\exists\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \neq 0$, telle que : $A.M = M.B$.
   d. Si A et B sont telles que : $Sp(A) \cap Sp(B) = \varnothing$, montrer que l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :
   $\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\phi(M) = A.M - M.B$, est un automorphisme.

Sous-espaces vectoriels stables.

69. Soit p un projecteur d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie n.
   Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par p.
   a. Soit x un vecteur de F tel que : $x = x_i + x_k$, avec : $x_i \in \mathrm{Im}(p)$, $x_k \in \ker(p)$.
   Montrer que x_i et x_k appartiennent à F.
   b. En déduire que F s'écrit : F = $F_i \oplus F_k$, où : $F_i \subset \mathrm{Im}(p)$ et : $F_k \subset \ker(p)$.
   c. En déduire tous les sous-espaces vectoriels de E stables par p.

70. Soient : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, tel que : $u^n = Id_{C^n}$, E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par u et p un projecteur de $\mathbb{C}^n$ sur E.
   On pose : $q = \frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.
   a. Montrer que : $\mathrm{Im}(q) \subset E$, puis que : $\ker(q) \oplus E = \mathbb{C}^n$.
   b. Montrer que q est le projecteur de $\mathbb{C}^n$ sur E dans la direction $\ker(q)$.

71. Soit T l'endomorphisme de **K**[X] défini par : $P \mapsto P(1-X)$.
   a. Montrer que T est un automorphisme de **K**[X].
   b. Déterminer les valeurs propres de T.

<u>Niveau 3.</u>

Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

72. Soit E l'espace vectoriel des suites convergentes réelles, et u l'application de E dans E qui, à une suite (x_n) fait correspondre (y_n), définie par : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1}$.
   a. Vérifier que : $u \in \mathcal{L}$(E), et déterminer le spectre de u.
   b. Faire de même pour v, défini par : $\forall\ (x_n) \in$ E, $v((x_n)) = (y_n)$, avec : $y_0 = 0$, et : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = x_n$.

73. Soit : E = $C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.

Pour f élément de E, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de $[-\pi,+\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$\forall$ x $\in [-\pi,+\pi]$, $u(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi}\cos(x-t).f(t).dt$, et : $v(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi}\sin(x-t).f(t).dt$.

a. Transformer l'écriture de $u(f)$ et $v(f)$ à l'aide d'une linéarisation de $\sin$ et $\cos$

b. Vérifier que u et v sont bien des endomorphismes de E.

c. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de u et de v.

74. Soit : E = $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et φ l'application définie par : $\forall$ $f \in$ E, $\varphi(f) = g$, avec :

$\forall$ x $\in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{1}{x}.\int_0^x f(t).dt$,

$g(0) = f(0)$.

a. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E.

b. Déterminer ses valeurs et vecteurs propres.

75. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

a. Montrer à l'aide d'un vecteur propre que si λ est valeur propre non nulle de $A.B$, alors λ est valeur propre de $B.A$.

b. Montrer avec le déterminant que si 0 est valeur propre de $A.B$, alors 0 est aussi valeur propre de $B.A$.

c. En déduire que : $Sp(A.B) = Sp(B.A)$.

76. Soit E le sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ constitué des fonctions f admettant une limite finie en $+\infty$.

On note u l'endomorphisme de E défini par : $\forall$ $f \in$ E, $\forall$ x ≥ 0, $u(f)(x) = f(x+1)$.

a. Soit λ une valeur propre de u et f un vecteur propre associé.

Montrer que si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, alors : $\lambda = 1$.

b. Montrer que 1 est valeur propre de u et déterminer l'espace propre associé.

c. On suppose à nouveau que λ est valeur propre de u et f est un vecteur propre associé.

Montrer que si f tend vers 0 en $+\infty$, alors : $|\lambda| < 1$.

d. Réciproquement, montrer que pour : $|\lambda| < 1$, il est possible de définir une fonction f sur $\mathbb{R}^+$ à l'aide de conditions sur [0,1] qui soit vecteur propre de u associé à λ.

77. Soit u un endomorphisme de rang 2 d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie.

a. Donner la matrice de u dans une base adaptée à $\ker(u)$.

b. En déduire χ_u en fonction de $tr(u)$ et de $tr(u^2)$.

Diagonalisation, trigonalisation, utilisation de la diagonalisabilité.

78. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec : k $\in \mathbb{C}$.

a. Déterminer $rg(A)$ et en déduire une valeur propre de A.

b. Montrer que le polynôme caractéristique de A peut se mettre sous la forme :

$\chi_A(x) = x^2.(x-a).(x-b)$.

c. Montrer que a et b vérifie : $a + b = k$, $a^2 + b^2 = k^2 + 6$.

d. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles on a : $a = b$?

Préciser alors les vecteurs propres associés à cette valeur propre.

e. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles la matrice est diagonalisable ?

79. Soit ϕ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par : $\forall$ $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\phi(M) = M + tr(M).I_n$.

Montrer que ϕ est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

80. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec : $n \geq 3$.
On suppose que : $tr(A) = 0,\ rg(A) = 2,\ A^n \neq 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

81. Soit : $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et soit : $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.
a. Calculer $A.{}^tA$, et en déduire le polynôme caractéristique de A.
b. Trouver les valeurs propres de A et leur ordre de multiplicité.
c. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ (on pourra poser : $\omega = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$).

82. Soient α, β, γ des scalaires deux à deux distincts, et : $E = \mathbf{K}_2[X]$.
a. Montrer que l'application u qui à P dans E fait correspondre le reste de la division euclidienne de $X^3.P$ par $(X-\alpha).(X-\beta).(X-\gamma)$ est un endomorphisme de E.
b. En utilisant une base bien choisie de E, étudier la diagonalisabilité de u.

83. Soient : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et : $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2.n}(\mathbb{C})$.
a. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda \in Sp(B)) \Leftrightarrow (\lambda^2 \in Sp(A))$.
b. Montrer que : $\forall\ \lambda \in Sp(B)$, $\dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_{\lambda^2}(A))$.
c. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

84. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a. Exprimer $tr(A^k)$ en fonction des valeurs propres de A, pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.
b. Montrer que : ($\forall$ $k \in \mathbb{N}$, $tr(A^k) = tr(B^k)$) $\Leftrightarrow$ ($Sp(A) = Sp(B)$, avec les mêmes multiplicités).

85. Montrer que tout endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie peut s'écrire comme somme de deux endomorphismes diagonalisables.

86. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et l'on désigne par p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu 3 Pile consécutifs lors des n premiers lancers.
a. Calculer p_1, p_2, p_3.
b. Pour : $n \geq 4$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.
c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

87. Soit : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $A \neq 0,\ A^3 + A = 0$.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

88. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que : $\exists$ $p \in \mathbb{N}$, $A^p = I_2$.
Montrer que : $A^{12} = I_2$.

89. Soit : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $M^2 + {}^tM = I_n$.
a. Montrer que M est inversible si et seulement si : $1 \notin Sp(M)$.

b. Montrer que M est diagonalisable.

90. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $A^n = I_n$, et telle que : $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.
Montrer que : $tr(A) = 0$.

91. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension quelconque, et soit : $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que P est un polynôme de **K**[X] tel que : $P(u) = 0, P(0) = 0, P'(0) \neq 0$.
Montrer que : $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

92. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
a. A l'aide des polynômes X^k, avec : $k \in \mathbb{N}$, montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A.P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
b. En déduire les matrices A telles que la matrice B associée soit diagonalisable.

93. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
a. On suppose que : $u \in Gl(E)$.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 l'est.
b. Généralisation : soit : $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que : $P'(u) \in Gl(E)$.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $P(u)$ l'est.

94. a. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ne contenant aucune matrice inversible.
Montrer que H contient toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
b. A l'aide des matrices de la base canonique, en déduire que tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient une matrice inversible, et donc est tel que : $H \cap Gl_n(\mathbf{K}) \neq \emptyset$.

Sous-espaces vectoriels stables.

95. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit f un endomorphisme de E.
a. Montrer que si f est diagonalisable, tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f.
b. Montrer la réciproque de l'implication précédente.

96. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et soit : $u \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable.
On note C_u l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u.
a. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
b. Montrer que : $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $(g \in C_u) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in Sp(u),\ E_\lambda(u)$ stable par g).
c. Pour : $\lambda \in Sp(u)$, on note m_λ la multiplicité de λ comme valeur propre de u.
Déduire de la question b. que : $\dim(C_u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda^2$.
d. On suppose que u admet n valeurs propres distinctes.
Montrer que $(id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de C_u.

97. Théorème de Cayley-Hamilton.
Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par u, $\hat{u}$ l'endomorphisme induit par u dans F, et χ_u et $\chi_{\hat{u}}$ les polynômes caractéristiques de u et $\hat{u}$.
a. Montrer que $\chi_{\hat{u}}$ divise χ_u.
Pour la suite, E est un **K**-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, et : $x \in E$, $x \neq 0$.
b. Montrer l'existence de : $p \leq n$, tel que :
- $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre de E,
- $u^p(x) \in F_x$, où : $F_x = Vect(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.

c. Montrer alors que F_x est stable par u .

On note $\hat{u}$ l'endomorphisme induit par u dans F_x

d. Calculer $\chi_{\hat{u}}$ en utilisant une base 'naturelle' de F_x

e. En déduire que : $\chi_{\hat{u}}(u)(x) = 0$ puis en déduire que : $\chi_u(u)(x) = 0$.

f. Conclure par le théorème de Cayley-Hamilton.

98. Théorème : « dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E et son polynôme minimal ont les mêmes racines. »
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et : $u \in \mathscr{L}$(E).
a. Montrer qu'il existe au moins un polynôme normalisé annulateur pour u .
b. Montrer qu'il existe un unique polynôme normalisé annulateur pour u et de plus bas degré qu'on appellera polynôme minimal de u et qu'on notera μ_u .
c. Montrer que si λ est valeur propre de u alors λ est racine de μ_u .
d. Montrer que toute racine de μ_u est valeur propre de u .
e. Conclure.