Produit scalaire (corrigé niveau 3).

Exercices généraux sur le produit scalaire.

76\. a. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, de façon immédiate.

Soit maintenant : $g \in G$. et : $f \in F$.

Alors : $\forall f \in F$, $\int_{-1}^{+1} f(t).g(t).dt = 0$,

puisque la fonction sous l'intégrale est nulle sur [-1,0] du fait de g et sur [0,1] du fait de f.

Donc : $G \subset F^{\perp}$.

Soit maintenant : $h \in F^{\perp}$, et pour tout : $n \geq 2$, la fonction f_n définie par :

- $\forall$ t $\in$ [0,1], $f_n(t) = 0$,
- $\forall$ t $\in$ $\left[-1, -\frac{1}{n}\right]$, $f_n(t) = h(t)$,
- f_n est affine sur $\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$, avec : $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = h\left(-\frac{1}{n}\right)$, et : $f_n(0) = 0$.

Les fonctions f_n sont continues sur [-1,+1], et nulles sur [0,1], donc appartiennent à F.

Par conséquent : $\forall n \geq 2$, $\int_{-1}^{+1} f_n(t).h(t).dt = 0 = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} h^2(t).dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} f_n(t).h(t).dt$, et :

$\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} h^2(t).dt = -\int_{-\frac{1}{n}}^{0} f_n(t).h(t).dt$, d'où : $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} h^2(t).dt \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{0} |f_n(t).h(t)|.dt \leq \frac{M}{n}.\left|h\left(-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M^2}{n}$,

où M désigne un majorant de h sur le segment [-1,+1].

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} h^2(t).dt = \int_{-1}^{0} h^2(t).dt$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M^2}{n} = 0$,

et avec le théorème des gendarmes, on en déduit que : $0 = \int_{-1}^{0} h^2(t).dt$.

On termine en disant que h^2 est continue et positive sur le segment [-1,0] donc y est nulle.

Finalement : $h \in G$, donc : $F^{\perp} \subset G$, et finalement : $F^{\perp} = G$.

b. F et G ne sont pas supplémentaires dans E, car la fonction constante égale à 1 (qui n'est donc pas nulle en 0), ne peut se décomposer comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

On a donc ici : $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

77\. a. Pour : $n = 1$, le résultat est immédiat car : $\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.x_k\right\|^2 = \|\varepsilon_1.x_1\|^2 = \|x_1\|^2$.

Si : $n = 2$, alors : $\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.x_k\right\|^2 = \|\varepsilon_1.x_1 + \varepsilon_2.x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2.\varepsilon_1.\varepsilon_2.(x_1|x_2) \leq M^2$,

et ceci pour tout couple : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,+1\}^2$.

On peut alors choisir ε_1 et ε_2 de telle sorte que le produit $\varepsilon_1.\varepsilon_2.(x_1|x_2)$ soit positif et dans ce cas :

$\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2.\varepsilon_1.\varepsilon_2.(x_1|x_2) = \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.x_k\right\|^2 \leq M^2$, d'où le résultat.

b. Supposons maintenant le résultat démontré pour un entier : $n \geq 2$, et soit : $(x_1,..., x_{n+1}) \in E^{n+1}$, vérifiant la propriété précédente.

Alors : $\forall \{\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n+1}\} \in \{-1,+1\}^{n+1}$, $\left\|\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k.x_k\right\|^2 \leq M^2$, d'où :

- $\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k . x_k\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 + 2.\varepsilon_{n+1}.(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k . x_k | x_{n+1}) \leq M^2$.

La même inégalité appliquée à $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n,-\varepsilon_{n+1}\}$ donne :

- $\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k . x_k\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 - 2.\varepsilon_{n+1}.(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k . x_k | x_{n+1}) \leq M^2$,

et donc en additionnant : $2.\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k . x_k\right\|^2 + 2.\|x_{n+1}\|^2 \leq 2.M^2$, soit : $\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k . x_k\right\|^2 \leq M^2 - \|x_{n+1}\|^2$.

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence, on en déduit que : $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq M^2 - \|x_{n+1}\|^2$,

et finalement : $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \leq M^2$, ce qui termine la récurrence.

78. a. Si on note φ : $P \mapsto \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt$, φ est clairement une forme linéaire sur E et non nulle puisque le polynôme constant égal à 1 a pour image : $\varphi(1) = \int_{-1}^{+1} |t|.dt = 2.\int_{-1}^{+1} t.dt = 1$.

Montrons que : $E = Vect(1) \oplus \ker(\varphi)$.

Pour : $P \in E$, si : $P = \lambda + P_0$, avec : $P_0 \in \ker(\varphi)$, alors :

$\int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt = \int_{-1}^{+1} |t|.P_0(t).dt + \lambda.\int_{-1}^{+1} |t|.dt = 0 + \lambda$,

et donc :

- $\lambda = \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt$,
- $P_0 = P - \lambda$.

Réciproquement, en posant : $\lambda = \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt$, et : $P_0 = P - \lambda$, on a bien :

- $P = \lambda + P_0$,
- λ est une constante,
- $\varphi(P_0) = \int_{-1}^{+1} |t|.P_0(t).dt = \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt - \lambda.\int_{-1}^{+1} |t|.dt = \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt - \lambda = 0$, et : $P_0 \in \ker(\varphi)$.

Cette unique décomposition pour tout vecteur : $P \in E$, montre que : $E = Vect(1) \oplus \ker(\varphi)$.

Puisque : $H = \ker(\varphi)$, admet un supplémentaire de dimension 1 dans E, on dit que c'est un hyperplan de E (pour prolonger la notion définie à l'aide d'une dimension en dimension finie).

b. Soit : $Q \in H^{\perp}$.

Alors : $\forall\ P \in E$, $\int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt = \int_{-1}^{+1} P_0(t).Q(t).dt + \left(\int_{-1}^{+1} \lambda.Q(t).dt\right) = 0 + \lambda.\int_{-1}^{+1} Q(t).dt$,

avec : $P = \lambda + P_0$, dans la décomposition précédente,

et puisque : $\lambda = \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt$, on a bien : $\int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt = \left(\int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt\right).\left(\int_{-1}^{+1} Q(t).dt\right)$.

c. On déduit de l'égalité précédente que :

$\forall\ P \in E$, $\int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt - \left(\int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt\right).\alpha = 0 = \int_{-1}^{+1} P(t).[Q(t) - \alpha.|t|].dt$, avec : $\alpha = \int_{-1}^{+1} Q(t).dt$.

La fonction φ : $t \mapsto Q(t) - \alpha.|t|$, est alors continue sur [-1,1], et orthogonale à tous les polynômes.

Le théorème de Weierstrass montre alors que cette fonction est nulle sur [-1,+1].

En effet, si (P_n) est une suite de polynômes qui converge uniformément sur [-1,+1] vers φ, alors :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{+1} \varphi^2(t).dt = \int_{-1}^{+1} \varphi(t).(\varphi(t) - P_n(t)).dt + \int_{-1}^{+1} \varphi(t).P_n(t).dt = \int_{-1}^{+1} \varphi(t).(\varphi(t) - P_n(t)).dt$,

puisque l'autre terme est nul du fait de l'orthogonalité de φ et de ℝ[X].

On en déduit que :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \int_{-1}^{+1} \varphi^2(t).dt \leq \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|.|\varphi(t) - P_n(t)|.dt \leq 2.M.\sup_{[-1,+1]} |\varphi - P_n|$, où : $M = \sup_{[-1,+1]} |\varphi|$.

Et comme la quantité majorante tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que : $\int_{-1}^{+1} \varphi^2(t).dt = 0$.

φ^2 étant alors continue et positive sur [-1,+1], elle y est nulle, et φ aussi.

Donc : $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $Q(t) = \alpha.|t|$,

mais ceci n'est possible pour un polynôme que si : $\alpha = 0$, soit : $Q = 0$.

Donc : $H^{\perp} = \{0\}$.

79. a. Notons A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

Alors : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i | u(e_j)).e_i$,

puisque la base $\mathscr{B}$ étant orthonormale, on reconnaît ainsi les coordonnées de $u(e_j)$ dans cette base.

Donc : $tr(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (e_i | u(e_i))$.

b. Deux possibilités alors se présentent :

• soit tous les éléments diagonaux de A sont nuls et : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $(e_i | u(e_i)) = 0$,

ce qui répond à la question,

• soit ce n'est pas le cas et il existe alors un terme non nul sur la diagonale, mais aussi nécessairement au moins un autre de signe contraire puisque la somme de ces éléments vaut 0.

Autrement dit : $\exists\ 1 \leq i \neq j \leq n$, $(e_i | u(e_i)) > 0$, et : $(e_j | u(e_j)) < 0$.

On considère alors la fonction proposée définie de [0,1] dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall$ t $\in$ [0,1], φ(t) = $(u(t.e_i + (1-t).e_j) | t.e_i + (1-t).e_j)$.

En développant cette expression avec la linéarité de u et la bilinéarité du produit scalaire, on constate qu'elle est polynomiale en t (de degré au plus 2), donc est continue sur [0,1].

De plus : $\varphi(0) = (u(e_j)|e_j) < 0$, et : $\varphi(1) = (u(e_i)|e_i) > 0$,

donc φ s'annule sur [0,1] et la valeur de t ainsi

trouvée fournit un vecteur x qui vérifie : $(u(x)|x) = 0$, et qui est non nul puisque (e_i, e_j) est libre.

c. Raisonnons alors comme proposé par récurrence sur n.

• Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension 1 tel que : $tr(u) = 0$, alors sa matrice dans n'importe quelle base de E est nulle de taille 1×1 donc à diagonale nulle.

• Supposons le résultat démontré pour tout espace euclidien de dimension : $n \geq 1$, et soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension $n+1$, tel que : $tr(u) = 0$.

On a trouvé avec la question précédente un vecteur dans E non nul, que l'on peut diviser par sa norme pour obtenir un vecteur ε_1 et tel que : $(u(\varepsilon_1)|\varepsilon_1) = 0$.

On complète alors ε_1 en une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n+1})$ de E.

Dans cette base la première colonne de la matrice A de u commence par 0 puisque :

$$u(\varepsilon_1) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,1}.\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n+1} (\varepsilon_i | u(\varepsilon_1)).\varepsilon_i = \sum_{i=2}^{n+1} (\varepsilon_i | u(\varepsilon_1)).\varepsilon_i .$$

La matrice de u dans cette base a alors pour forme par blocs : $A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A' \end{pmatrix}$, où A' est de taille $n \times n$.

La matrice A' a une trace nulle puisque : $tr(A) = 0$, et correspond à un endomorphisme u' de l'espace euclidien : $E' = Vect(\varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n+1})$, que l'on munit du produit scalaire induit par celui de E.

Donc il existe une base orthonormale $(\varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_{n+1})$ de E' dans laquelle la matrice de u' est à éléments diagonaux nuls.

Notons A'_0 cette dernière matrice et P la matrice de passage de $(\varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n+1})$ à $(\varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_{n+1})$.

Alors : $A'_0 = P^{-1}.A'.P$, et un produit par blocs donne :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}^{-1}.A.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P^{-1}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & *\\ * & A'\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & *\\ * & A'_0\end{pmatrix}.$$

Or cette matrice est la matrice de u dans la base ($\varepsilon_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_{n+1}$) de E et elle est à diagonale nulle puisque A'_0 est à diagonale.

On termine ainsi la récurrence.

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

80. Pour un vecteur y de E, l'expression de $p_F(y)$ est : $p_F(y) = \sum_{i=1}^{p} (x_i|y).x_i$,

puisque la base ($x_1,...,x_p$) est orthonormale.

Si on ramène cette égalité à son écriture matricielle dans la base $\mathscr{B}$ et en appelant M la matrice de p_F dans cette même base $\mathscr{B}$, alors :

$$\forall\ Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ M.Y = \sum_{i=1}^{p} ({}^tX_i.Y).X_i = \sum_{i=1}^{p} X_i.({}^tX_i.Y) = \sum_{i=1}^{p} (X_i.{}^tX_i).Y = \left(\sum_{i=1}^{p} (X_i.{}^tX_i)\right).Y,$$

en utilisant le fait que l'expression du produit scalaire dans $\mathscr{B}$ est canonique puisque la base est orthonormale et que la quantité : ${}^tX_i.Y = (x_i|y)$, est un scalaire et commute avec toute matrice.

Donc : $\forall\ Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(M - \sum_{i=1}^{p} (X_i.{}^tX_i)\right).Y = 0$.

On en déduit que : $M - \sum_{i=1}^{p} (X_i.{}^tX_i) = 0$, puis finalement : $M = \sum_{k=1}^{p} X_k.{}^tX_k$.

81. • Pour : $n = 2$, le résultat est vrai.

En effet, si : $(x_1|x_2) < 0$, alors les deux vecteurs sont non nuls et constituent chacun une famille libre.

• Supposons maintenant le résultat vrai pour une valeur de : $n \geq 2$, donnée.

Soit ($x_1,...,x_{n+1}$) vérifiant la propriété proposée.

Puisque tous les vecteurs sont non nuls, on peut considérer p la projection orthogonale sur $Vect(x_1)$ et :

$\forall\ 2 \leq i \leq n+1,\ x_i = p(x_i) + y_i^\perp$,

avec :

- $y_i^\perp \in (Vect(x_1))^\perp$,
- $p(x_i) = \lambda_i x_1$, et : $(x_i|x_1) = (p(x_i)|x_1) + (y_i^\perp|x_1) = \lambda_i.\|x_1\|^2$.

On remarque alors que : $\forall\ 2 \leq i \leq n+1,\ \lambda_i = \dfrac{1}{\|x_1\|^2}.(x_1|x_i) < 0$.

Puis : $\forall\ 2 \leq i \neq j \leq n+1,\ (x_i|x_j) = (y_i^\perp|y_j^\perp) + \lambda_i.\lambda_j.\|x_1\|^2$,

et donc : $(y_i^\perp|y_j^\perp) = (x_i|x_j) - \lambda_i.\lambda_j.\|x_1\|^2 < 0$.

Donc par hypothèse de récurrence, toute sous-famille de $n-1$ vecteurs de la famille ($y_2^\perp,...,y_{n+1}^\perp$) est libre,

Considérons alors une de ces sous-famille, par exemple ($y_2^\perp,...,y_n^\perp$).

Comme réunion de deux familles libres issues de deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, la famille ($x_1, y_2^\perp,...,y_n^\perp$) est encore une famille libre.

Enfin, la famille ($x_1,...,x_n$) est encore libre car :

$\forall\ (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbf{K}^n$, $(\alpha_1.x_1 + ... + \alpha_n.x_n = 0) \Rightarrow ((\alpha_1 + \alpha_2.\lambda_2 ... + \alpha_n.\lambda_n).x_1 + \alpha_2.y_2^\perp + ... + \alpha_n.y_n^\perp = 0)$,

donc on en déduit que : $\alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$,

puis en revenant à la première égalité et puisque x_1 est non nul, on termine avec : $\alpha_1 = 0$.

Les vecteurs $x_1,...,x_{n+1}$ jouant des rôles symétriques, on en déduit que c'est valable pour une sous-famille quelconque, ce qui termine la récurrence.

82. a. On peut noter que : $|X.Y| \leq \frac{1}{2}.(X^2 + Y^2)$,

puisque la différence vaut : $\frac{1}{2}.(X^2 + Y^2) - |X.Y| = \frac{1}{2}.(|X| - |Y|)^2 \geq 0$.

Donc par comparaison, et comme X^2 et Y^2 admettent par hypothèse une espérance, $|X.Y|$ (et donc également $X.Y$) admet une espérance.

b. F' est inclus dans F et est non vide puisque la variable aléatoire nulle est des F' (puisqu'elle admet un moment d'ordre 2).

Par ailleurs si X est dans F', alors pour tout réel λ, $\lambda.X$ admet aussi un moment d'ordre 2 et donc est dans F'.

Enfin, si X et Y sont dans F', alors :

$(X + Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2.X.Y$,

qui admet une espérance par combinaison linéaire, donc $X + Y$ admet un moment d'ordre 2 et appartient ainsi à F'.

F' est donc bien un sous-espace vectoriel de F.

c. La question a. montre que ψ est correctement définie de $F' \times F'$ dans ℝ.

Il est par ailleurs immédiat que ψ est symétrique et bilinéaire (par linéarité de l'espérance).

Ensuite : $\forall\ X \in F'$, puisque : $X^2 \geq 0$, l'espérance de X^2 est également positive et ψ est positive.

Enfin, si pour : $X \in F'$, on a : $\psi(X, X) = E(X^2) = 0$,

alors avec le théorème de transfert, on peut écrire :

$0 = E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2.P(X = x)$,

et comme la somme (de la série si on utilise une énumération de $X(\Omega)$) est à termes positifs, on en déduit que : $\forall\ x \in X(\Omega)$, $x^2.P(X = x) = 0$, puis :

- si la condition proposée est satisfaite, alors on en déduit que $X(\Omega)$ ne contient aucun terme non nul, donc : $X(\Omega) = \{0\}$, et : $X = 0$.
- si la condition n'est pas satisfaite, alors on peut trouver : $X \in F'$, et : $x_0 \in X(\Omega)$, non nul tel que : $P(X = x_0) = 0$.

Dans ce cas on peut noter : $Y = X.1_{(X = x_0)}$, où $1_{(X = x_0)}$ est la fonction indicatrice de $(X = x_0)$, et :

Y admet un moment d'ordre 2 car : $1^2_{(X = x_0)} \leq 1$, donc : $Y^2 = X^2.1^2_{(X = x_0)} \leq X^2$, et donc : $Y \in F'$,

Y est non nulle car : $\forall\ \omega \in (X = x_0)$, $Y(\omega) = X(\omega) = x_0 \neq 0$, et : $\forall\ \omega \notin (X = x_0)$, $Y(\omega) = 0$

$E(Y^2) = x_0^2.P(X = x_0) > 0$,

car Y ne prend que deux valeurs, 0 et x_0, puisque de plus : $\forall\ \omega \notin (X = x_0)$, $Y(\omega) = 0$.

Donc la forme ψ est définie si et seulement si la condition de l'énoncé est satisfaite.

d. La variable aléatoire 1_A est définie par :

$\forall\ \omega \in \Omega$, $1_A(\omega) = 1$, si : $\omega \in A$, et : $1_A(\omega) = 0$, si : $\omega \notin A$.

Donc elle ne prend que deux valeurs et admet ainsi une espérance qui vaut :

$E(1_A) = 1.P(1_A = 1) + 0.P(1_A = 0) = P(A)$,

car : $(1_A = 1) = \{\omega \in \Omega, 1_A(\omega) = 1\} = A$.

Enfin, il est immédiat que : $1_A^2 = 1_A$, donc 1_A admet un moment d'ordre 2 et : $1_A \in F'$.

Puisque maintenant 1_A et 1_Ω sont dans F', on en déduit que : $G_A = Vect(1_A, 1_\Omega)$, est inclus dans F', F' étant stable par combinaison linéaire.

De plus : $1_{\bar{A}} = 1_\Omega - 1_A$, donc : $1_{\bar{A}} \in G_A$.

Comme A est distinct de l'ensemble vide et de Ω, 1_A et $1_{\bar{A}}$ sont non nulles, et : $1_A.1_{\bar{A}} = 0$.

Donc : $\psi(1_A, 1_{\bar{A}}) = E(1_A.1_{\bar{A}}) = 0$.

On en déduit que cette famille est orthogonale, et formée de vecteurs non nuls, donc est libre.

Mais comme G_A est engendré par deux vecteurs, on a : $\dim(G_A) \leq 2$.
On peut ainsi en conclure que : $\dim(G_A) = 2$, puisqu'il contient une famille libre de deux vecteurs et cette famille (donc $(1_A, 1_{\overline{A}})$) est une base orthogonale de G_A.
Soit enfin : $\forall\ B \subset \Omega$.
On détermine alors une base orthonormale de G_A en normant les vecteurs de la base précédente, et :
$\|1_A\|^2 = \psi(1_A, 1_A) = E(1_A^2) = E(1_A) = P(A)$, et :
$\|1_{\overline{A}}\|^2 = P(\overline{A})$.

On en déduit que : $p_{G_A}(1_B) = \dfrac{1}{\sqrt{P(A)}}.\psi(1_B, 1_A).\dfrac{1_A}{\sqrt{P(A)}} + \dfrac{1}{\sqrt{P(\overline{A})}}.\psi(1_B, 1_{\overline{A}}).\dfrac{1_{\overline{A}}}{\sqrt{P(\overline{A})}}$.

Enfin : $\psi(1_B, 1_A) = E(1_A.1_B) = E(1_{A\cap B}) = P(A \cap B)$,
car : $\forall\ \omega \in \Omega$, $1_A(\omega).1_B(\omega) = 1$, si et seulement si : $\omega \in A$, et : $\omega \in B$, ou encore : $\omega \in A \cap B$.
Le même résultat étant également vrai pour $\overline{A}$, on conclut que :
$p_{G_A}(1_B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}.1_A + \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}.1_{\overline{A}} = P_A(B).1_A + P_{\overline{A}}(B).1_{\overline{A}}$.

e. On commence par remarquer que X et 1_Ω ne sont pas proportionnelles puisque X n'est pas constante, donc G est un plan.
Puis, pour : $Y \in F'$, on cherche : $Y' = \alpha.X + \beta.1_\Omega$, tel que : $Y - Y' \in G^\perp$, donc tel que :
- $\psi(Y - Y', X) = 0 = E(Y.X) - \alpha.E(X^2) - \beta.E(X)$, et :
- $\psi(Y - Y', 1_\Omega) = 0 = E(Y) - \alpha.E(X) - \beta.E(1_\Omega)$.

On en déduit, en multipliant la première égalité par 1 et la seconde par $E(X)$ et en soustrayant :
$E(X.Y) - E(X).E(Y) = (E(X^2) - E(X))^2.\alpha$, soit encore : $\alpha.V(X) = \mathrm{cov}(X, Y)$.
De même : $\beta.V(X) = E(Y).E(X^2) - E(X.Y).E(X)$.
Ici, on peut utiliser l'argument qu'il existe une unique solution (pour garantir que $V(X)$ est non nul et qu'on peut diviser) ou montrer que puisque X n'est pas constante, sa variance est non nulle.
On obtient ainsi : $\alpha = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}$, puis : $\beta = \dfrac{E(Y).E(X^2) - E(X.Y).E(X)}{V(X)}$,

et enfin : $p_G(Y) = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}.X + \dfrac{E(Y).E(X^2) - E(X.Y).E(X)}{V(X)}.1_\Omega$.

f. Puisque toutes les variables qui interviennent admettent des moments d'ordre 2, $p_G(Y)$ admet une espérance et : $E(p_G(Y)) = \dfrac{E(X.Y) - E(X).E(Y)}{V(X)}.E(X) + \dfrac{E(Y).E(X^2) - E(X.Y).E(X)}{V(X)}.E(1_\Omega)$.
Enfin : $E(1_\Omega) = E(1) = P(\Omega) = 1$,
donc on conclut que : $E(p_G(Y)) = \dfrac{E(Y).E(X^2) - (E(X))^2.E(Y)}{V(X)} = \dfrac{V(X)}{V(X)}.E(Y) = E(Y)$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

83. Soit donc $(x_1, ..., x_p)$ une famille libre de vecteurs de E, et notons : $F = Vect(x_1, ..., x_p)$.
Pour : $x \in$ E, on peut décomposer x en : $x = x_F + x^\perp$, avec : $x_F \in F$, et : $x^\perp \in F^\perp$.
La distance de x à F est alors : $d(x, F) = \|x - p(x)\| = \|x - x_F\| = \|x^\perp\|$,
où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F.
D'autre part : $Gram(x, x_1, ..., x_p) = Gram(x^\perp + x_F, x_1, ..., x_p) = Gram(x^\perp, x_1, ..., x_p) + Gram(x_F, x_1, ..., x_p)$.
Mais comme : $x_F \in F = Vect(x_1, ..., x_p)$, le deuxième terme de cette somme est nul (voir exercice 55).
D'autre part dans le premier déterminant de Gram, puisque $x^\perp$ est orthogonal à F, tous les termes de la

première colonne à partir du deuxième sont nuls soit : $\forall\ 1 \le i \le p$, $(x^{\perp}|x_i) = 0$, et :

$$Gram(x^{\perp}, x_1, ..., x_p) = \begin{vmatrix} (x^{\perp}|x^{\perp}) & (x^{\perp}|x_1) & \cdots & (x^{\perp}|x_n) \\ 0 & (x_1|x_1) & \cdots & (x_1|x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_n|x_1) & \cdots & (x_n|x_n) \end{vmatrix} = (x^{\perp}|x^{\perp}).Gram(x_1, ..., x_p),$$

d'où : $d(x,F) = \|x^{\perp}\| = \sqrt{(x^{\perp}|x^{\perp})} = \sqrt{\dfrac{Gram(x^{\perp}, x_1, ..., x_p)}{Gram(x_1, ..., x_p)}}$.

84. • Montrons d'abord qu'une telle décomposition, si elle existe, est unique, et pour cela, supposons que : $A = Q.R = Q'.R'$, où Q et Q' sont orthogonales et R et R' triangulaires supérieures à éléments diagonaux strictement positifs.
Alors Q' et R sont inversibles (puisque : $\det(R) \neq 0$, produit de ses éléments diagonaux).
Donc : $Q'^{-1}.Q = R'.R^{-1}$.
Cette matrice est donc orthogonale (produit de deux matrices orthogonales), mais aussi triangulaire supérieure (R^{-1} est triangulaire supérieure et le produit de deux matrices triangulaires supérieures l'est aussi), à éléments diagonaux strictement positifs (ceux de R^{-1} sont les inverses de ceux de R donc sont positifs, et ceux du produit sont les produits des éléments diagonaux.
Or on a montré dans l'exercice 40 que de telles matrices sont diagonales avec des éléments diagonaux égaux à ± 1.
Donc avec le fait que les éléments diagonaux sont positifs, on en déduit que ce produit vaut I_n, et donc :

- $Q'^{-1}.Q = I_n$, donc : $Q = Q'$,
- $R'.R^{-1} = I_n$, donc : $R = R'$.

• Considérons maintenant A comme la matrice représentative d'une famille : $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$, de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (donnés par les colonnes de A).
Alors cette famille est libre et c'est une base de $\mathbb{R}^n$, puisque A est inversible.
Notons : $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, la base orthonormale fournie par le procédé de Gram-Schmidt à partir $\mathcal{F}$, avec la condition : $\forall\ 1 \le k \le n$, $(\varepsilon_k|x_k) > 0$, où $(\,.\,|\,.\,)$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Notons enfin P la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à la base $\mathcal{B}$, et Q la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$.
La matrice Q est orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.
Par construction de la famille $\mathcal{B}$, la matrice P est triangulaire supérieure car :
$\forall\ 1 \le k \le n$, $\varepsilon_k \in Vect(x_1, ..., x_k)$.
Son inverse : $R = P^{-1}$, est donc aussi triangulaire supérieure et : $\forall\ 1 \le k \le n$, $x_k \in Vect(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)$.
Enfin, l'élément diagonal $r_{k,k}$ correspond à la coordonnée de x_k selon ε_k, et la base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ étant orthonormale, on a : $r_{k,k} = (\varepsilon_k|x_k) > 0$.
Enfin : $A = mat(\mathcal{B}_c \to \mathcal{F}) = mat(\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}).mat(\mathcal{B} \to \mathcal{F}) = Q.P^{-1} = Q.R$,
soit bien ce que l'on voulait (Q orthogonale, R triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs).

Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles positives.

85. a. La matrice A étant symétrique et réelle, elle est diagonalisable.
b. Puisque H est de rang 1, il existe au moins une colonne non nulle, et toutes les autres colonnes de H qu'on notera $H_1, ..., H_n$ sont proportionnelles à cette colonne.
Si on note alors U celle colonne particulière, alors : $\forall\ 1 \le j \le n$, $\exists\ v_j \in \mathbb{R}$, $H_j = v_j.U$.

Si maintenant on note : $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, alors : $U.{}^tV=H$.

Enfin U et V ne peuvent être proportionnelles, car sinon :

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, $V=\lambda.U$, puis : $H=\lambda.U.{}^tU$, et : $H={}^tH$, soit H symétrique ce qui est exclu.

c. Si X est orthogonal à U et à V (pour le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), alors :

${}^tU.X={}^tV.X=0$, et : $A.X=U.{}^tV.X+V.{}^tU.X=0$.

Donc X (s'il est non nul) est vecteur propre de A , associé à la valeur propre 0.

Réciproquement, si : $A.X=0$, alors la famille (U,V) étant libre, on a :

$0=U.{}^tV.X+V.{}^tU.X=U.({}^tV.X)+V.({}^tU.X)=({}^tV.X).U+({}^tU.X).V$,

et les deux parenthèses (qui sont des réels) sont nulles, soit : ${}^tU.X={}^tV.X=0$.

On en déduit que X est orthogonal à U et à V .

Donc si : $n\geq 3$, alors $(Vect(U,V))^{\perp}$ est de dimension : $n-2\geq 1$,

et 0 est valeur propre de A avec pour espace propre associé $(Vect(U,V))^{\perp}$.

Enfin : $\mathrm{Im}(A)\subset Vect(U,V)$, puisque : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A.X=(V|X).U+(U|X).V$,

et il est clair que le plan : $P=Vect(U,V)$, est stable par A .

Or dans la base (U,V) de P , la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est :

$A'=\begin{pmatrix} (U|V) & \|V\|^2 \\ \|U\|^2 & (U|V) \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A' permet de trouver ses deux valeurs propres (réelles) qui sont :

$\lambda_{\pm}=(U|V)\pm\|U\|.\|V\|$,

et ces valeurs sont non nulles car les vecteurs U et V sont non colinéaires (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Les espaces propres associés sont les droites $Vect\left(\dfrac{U}{\|U\|}\mp\dfrac{V}{\|V\|}\right)$, droites qui sont bien orthogonales.

Finalement :

- si : $n=2$, on a trouvé les deux sous-espaces propres de A et leurs valeurs propres associées,
- si : $n\geq 3$, il y a trois valeurs propres (les deux précédentes et 0) et trois sous-espaces propres (les deux droites précédentes et $(Vect(U,V))^{\perp}$).

86. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) à A et à la matrice B définie par :

$\forall\ 1\leq i,j\leq n$, $b_{i,j}=signe(a_{i,j})$, si : $a_{i,j}\neq 0$, et $b_{i,j}=1$, sinon.

Alors : $|(A|B)|=\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}.b_{k,i}\right|=\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|\leq\sqrt{tr({}^tB.B)}.\sqrt{tr({}^tA.A)}$.

Puis : $tr({}^tB.B)=\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{n}b_{k,i}.b_{k,i}\right|=n^2$.

D'autre part : $tr({}^tA.A)=tr(A^2)=tr(A)$.

Donc : $\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|\leq\sqrt{n^2}.\sqrt{tr({}^tA.A)}=n.\sqrt{tr(A)}$.

87. a. Pour : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $\forall\ 1\leq k\leq p$, ${}^tX.S_k^2.X\geq 0$, donc :

$${}^tX.S.X=\sum_{k=1}^{p}{}^tX.S_k^2.X=\sum_{k=1}^{p}{}^tX.{}^tS_k.S_k.X=\sum_{k=1}^{p}\|S_k.X\|^2\geq 0,$$

et : $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Ensuite :

- si : $\forall\ 1 \leq k \leq p$, $S_k = 0$, alors : $S = 0$.
- si : $S = 0$, alors :

$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX.S.X = 0$, donc : $\sum_{k=1}^{p} \|S_k.X\|^2 = 0$,

et : $\forall\ 1 \leq k \leq p$, $\|S_k.X\|^2 = 0$, donc : $S_k.X = 0$, et finalement : $S_k = 0$.

b. On sait que : $\forall\ S \in S_n(\mathbb{R}), \exists\ P \in O(n), \exists\ D \in \mathrm{Diag}_n(\mathbb{R}),\ S = P.D.{}^tP$.
D étant diagonale, tout élément diagonal de D admet une racine p ième réelle unique, si p est impair.
Notons Δ la matrice constituée de ces racines p ièmes (dans le même ordre).
Alors : $\Delta^p = D$, et : $(P.\Delta.{}^tP)^p = P.\Delta^p.{}^tP = P.D.{}^tP = S$.
Autrement dit, en notant : $R = P.\Delta.{}^tP$, on a : $R^p = S$.
Et on constate immédiatement que : ${}^tR = P.{}^t\Delta.{}^tP = P.\Delta.{}^tP = R$,
donc R est symétrique réelle.

c. Si S est dans $S_n^+(\mathbb{R})$, alors les éléments diagonaux de la matrice D précédente sont des réels positifs.
En effet : $\forall\ \lambda \in Sp(S), \exists\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0,\ S.X = \lambda.X$.
Mais on a de plus : ${}^tX.S.X \geq 0$, donc : ${}^tX.S.X = {}^tX.\lambda.X = \lambda.\|X\|^2$,
et X étant non nul, on en déduit : $\lambda \geq 0$.
Donc on peut constituer la matrice Δ avec les racines p ièmes positives des éléments diagonaux de S et poser à nouveau : $R = P.\Delta.{}^tP$.
Alors :

- ${}^tR = R$, comme précédemment et R est symétrique,
- $R^p = P.\Delta^p.{}^tP = S$,
- $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX.R.X = {}^t(P.X).\Delta.(P.X) = {}^tY.\Delta.Y = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[p]{\lambda_i}.y_i^2 \geq 0$,

où les λ_i sont les valeurs propres de S et où on a pose : $Y = P.X$,
et donc : $R \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Finalement on a trouvé : $R \in S_n^+(\mathbb{R})$, telle que : $R^p = S$.

d. Dans le cas particulier où : $p = 2$, on obtient que : $\forall\ S \in S_n^+(\mathbb{R}), \exists\ R \in S_n^+(\mathbb{R}),\ R^2 = S$.
Si : $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors R inversible et : $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, car les valeurs propres de S et donc celles de R sont strictement positives (donc non nulles).
En effet, le calcul fait dans la question b montre que :

$\forall\ \lambda \in Sp(S)$, avec X un vecteur propre associé, alors : $\lambda = \dfrac{{}^tX.S.X}{\|X\|^2} > 0$.

D'où : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0,\ {}^tX.R.X = {}^tY.\Delta.Y = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}.y_i^2 > 0$,

avec les même notations que dans la question cb, et l'inégalité est garantie par le fait que les λ_i sont tous non nuls et qu'il y a au moins un des y_i qui est non nul puisque : ($X \neq 0$) $\Rightarrow$ ($Y = P.X \neq 0$).
Finalement dans ce cas, on a bien : $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

e. Si R répond au problème, étant symétrique réelle, elle est diagonalisable.
Notons alors r et s les endomorphismes canoniquement associés à R et S, et plus généralement dans la suite on appellera par des majuscules les matrices (carrées ou colonnes) canoniquement associées aux endomorphismes et vecteurs, désignés par des minuscules
Si on note $\mu_1,\ldots,\mu_k$ les valeurs propres distinctes de r et $E_1(r),\ldots,E_k(r)$ ses sous-espaces propres associés, alors :

$\forall\ 1 \leq i \leq k$, $\forall\ x \in E_i(r)$, $x \neq 0$, $R.X = \mu_i.X$, et : ${}^tX.R.X = \mu_i.{}^tX.X = \mu_i.\|X\|^2 \geq 0$,

car R est de plus positive.
Donc : $\forall\ 1 \leq i \leq k$, $\mu_i \geq 0$, et les valeurs μ_i^2 sont distinctes deux à deux.
De plus, on a aussi : $\forall\ 1 \leq i \leq k$, $\forall\ x \in E_i(r)$, $S.X = R^2.X = \mu_i^2.X$.

On en déduit que :

- $\forall\ 1 \le i \le k$, μ_i^2 est valeur propre de s,
- $\forall\ 1 \le i \le k$, $E_i(r) \subset E_{\mu_i^2}(s)$.

Or ℝⁿ est la somme directe des $E_i(r)$, et les sous-espaces $E_{\mu_i^2}(s)$ sont également en somme directe, et cette somme est incluse dans ℝⁿ.

Donc : $E = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i(r) \subset \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\mu_i^2}(s) \subset E$,

et on peut ainsi en déduire (par exemple en examinant les dimensions) que :

$\forall\ 1 \le i \le k$, $E_i(r) = E_{\mu_i^2}(s)$.

De plus, s ne peut admettre d'autre sous-espace propre et donc aucune autre valeur propre, puisque E est déjà la somme directe des espaces $E_{\mu_i^2}(s)$.

Autrement dit, les valeurs μ_i^2 sont <u>les</u> valeurs propres de s et $E_i(r)$ les espaces propres associés.

En conclusion, si on repart de $\lambda_1, ..., \lambda_k$, valeurs propres de s et $E_i(r)$ les sous-espaces propres associés, alors r ne peut valoir que :

$\forall\ 1 \le i \le k$, $\forall\ x \in E_i(r)$, $r(x) = \sqrt{\lambda_i}.x$,

car définir r sur une famille de sous-espaces de ℝⁿ dont la somme directe donne ℝⁿ, définit entièrement r sur ℝⁿ et ce, de façon unique.
L'endomorphisme r étant unique, la matrice canoniquement associée est également unique.

Matrices orthogonales.

88. a. Si on calcule la norme euclidienne canonique des trois colonnes de A, on trouve :

$\forall\ 1 \le k \le 3$, $\|C_k\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2.(a.b + b.c + c.a) = S^2 - 2.\sigma$.

D'autre part, les produits scalaires des colonnes deux à deux donnent :

$\forall\ 1 \le i \ne j \le 3$, $(C_i | C_j) = a.b + b.c + c.a = \sigma$.

Il est alors clair que : ($A \in O(3)$) $\Leftrightarrow$ ($S^2 - 2.\sigma = 1$, et : $\sigma = 0$) $\Leftrightarrow$ ($\sigma = 0$, et : $S \in$ {-1,+1}).

b. Il suffit de regarder l'influence qu'a la condition supplémentaire : $\det(A) = 1$.

Or : $\det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3.a.b.c = (a+b+c)^3 - 3.(a+b+c).(a.b+b.c+c.a) = S^3 - 3.S.\sigma$,
et au besoin en raisonnant par double implication, on obtient aisément :
($A \in SO(3)$) $\Leftrightarrow$ ($\sigma = 0$, et : $S = 1$).

c. Les trois coefficients sont racines de P si et seulement si : $P = (X-a).(X-b).(X-c)$,
soit si et seulement si, en égalant les coefficients dans les deux expressions de P :

- $S = 1$, (termes en X^2),
- $\sigma = 0$ (termes en X),
- $a.b.c = -k$ (termes constants).

Considérons alors la fonction polynomiale f déduite de P.

On a : $\forall\ x \in$ ℝ, $f'(x) = 3.x^2 - 2.x$, et f' s'annule en 0 et $\frac{2}{3}$.

Comme de plus : $f(0) = k$, et : $f\left(\frac{2}{3}\right) = k - \frac{4}{27}$,

l'étude des variations de f sur ℝ montre que cette fonction a trois racines réelles si et seulement si :

$f(0) \ge 0$, et : $f\left(\frac{2}{3}\right) \le 0$, soit : $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

Conclusion : ($A \in SO(3)$) $\Leftrightarrow$ (a, b, c racines de P avec : $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$),

soit encore :

($A \in SO(3)$) $\Leftrightarrow$ ($\exists\ k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$, tel que a, b, c sont les racines de : $P = X^3 - X^2 + k$).