Chapitre 11

Interversions pour les intégrales généralisées
Intégrales à paramètre

I. Les théorèmes d'interversion pour les intégrales généralisées

Nous allons compléter les résultats du chapitre **Suites et séries de fonctions** par deux théorèmes d'interversion dans le cadre des fonctions intégrables. On a tout d'abord :

Théorème de convergence dominée (admis : démonstration hors programme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f.
- La fonction f est continue par morceaux sur I.
- Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I, telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors toutes les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f.$$

Remarques

• L'hypothèse « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ » est appelée hypothèse de domination, elle donne son nom au théorème. Sous cette hypothèse, on a en passant à la limite simple, $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$ pour tout $t \in I$. On sait donc que les fonctions f_n et f sont intégrables, par comparaison.

• Vérifier cette hypothèse revient à établir une majoration des fonctions f_n par une fonction intégrable sur I et **indépendante de** n.

• L'hypothèse « f est continue par morceaux » ne peut pas être enlevée : rien ne garantit que les mêmes subdivisions sont adaptées à toutes les fonctions f_n. À la limite, il se pourrait donc que f ne soit pas continue par morceaux, et donc que son intégrale n'ait pas de sens pour nous. Cela dit, cette hypothèse est imposée par le cadre de travail des fonctions continues par morceaux. Elle n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Exemple – On pose, pour tout $n \geqslant 2$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n(t) = \frac{1}{1+nt^n}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers

$$f = \mathbb{1}_{[0,1[} : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

Toutes les fonctions f_n, et f, sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, pour tout $n \geqslant 2$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f_n(t)| \leqslant \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1[\\ \dfrac{1}{1+2t^2} & \text{si } t \geqslant 1, \end{cases}$$

la fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par comparaison immédiate). D'après le théorème de convergence dominée, toutes les fonctions f_n, et f, sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+nt^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1. \qquad \square$$

Pour les séries de fonctions, on a de plus le résultat suivant :

Théorème – Intégration terme à terme pour les intégrales généralisées

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I.
- La fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I.
- La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ converge.

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Ce résultat est admis (démonstration hors programme).

Exemples

• Soit, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n : t \mapsto \frac{\sin(n)}{n^2}\, e^{-nt}.$$

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ car, pour tout $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$,

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge. En particulier, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, pour tout $n \geqslant 1$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (multiple d'une fonction intégrable de référence) avec

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n^2}\,dt = \frac{1}{n^3},$$

et la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^3$ converge.

D'après le théorème précédent, la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} e^{-nt} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}.$$

• Ce théorème a l'avantage de s'appliquer dans le cadre des fonctions continues par morceaux, et avec convergence simple. Mais on pourrait avoir l'impression que, pour justifier la régularité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on devra recourir au théorème de continuité pour les séries de fonctions, qui s'applique dans le cadre des fonctions *continues*, avec convergence au moins *uniforme sur tout segment*. C'était le cas dans l'exemple précédent, mais ce n'est pas toujours le cas, comme va le montrer l'exemple suivant.

Soit S la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On peut montrer (voir le chapitre **Séries entières**) que pour tout $x \in]0,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ d'après le développement effectué ci-dessus, et la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$, car il s'agit de la fonction S.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1[$ (fonction polynomiale sur un intervalle borné) et

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2},$$

série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc convergente. D'après le théorème d'intégration terme à terme pour les intégrales généralisées, S est intégrable sur $]0,1[$ (ce que l'on aurait pu prouver directement) et

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\, dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

• Dans le cas d'une série de fonctions, le théorème précédent n'est pas le seul moyen d'intervertir somme et intégrale généralisée. Par exemple, il ne s'applique pas dans le cas où f_n est définie sur $I =]0,+\infty[$ par $f_n(x) = (-1)^n e^{-\sqrt{n}\,x}$, pour tout $n \geqslant 1$. Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,+\infty[$, mais

$$\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{n}\,x}\, dx = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

qui est une série divergente.

Dans ces cas, on pourra parfois utiliser avec profit, notamment :

- le théorème de convergence dominée pour la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{p} f_n)_{p\in\mathbb{N}}$.
- des estimations des restes de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, pour des séries alternées par exemple.

Dans l'exemple ci-dessus, pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît vers 0. On sait donc que $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge, et que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=m+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant |f_{m+1}(x)| = e^{-\sqrt{m+1}\,x}. \tag{11.1}$$

En particulier, pour tout $a > 0$ et $x \geqslant a$,

$$\left|\sum_{n=m+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant e^{-\sqrt{m+1}\,x} \leqslant e^{-\sqrt{m+1}\,a} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

le majorant étant indépendant de x. La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge donc uniformément sur tout segment de I, et comme chaque fonction f_n est continue sur I, on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} f_n.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, S_p est continue par morceaux sur I, $(S_p)_{p\geqslant 1}$ converge simplement sur I vers $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ qui est continue (et donc continue par morceaux) sur I d'après ce qui précède. Enfin, pour tout $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|S_p(x)| = \left|\sum_{n=1}^{p} f_n(x)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right| + \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \\
&\leqslant e^{-x} + e^{-\sqrt{p+1}\,x} \\
&\leqslant 2\,e^{-x},
\end{aligned}$$

ce qui donne l'hypothèse de domination pour la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ car la fonction $x \mapsto 2\,e^{-x}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} S_p(x)\,dx \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} S(x)\,dx,$$

ce qui est le résultat voulu, car pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} S_p(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{p} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

par linéarité de l'intégrale : il y a un nombre fini de termes, qui correspondent tous à des intégrales convergentes (de référence).

Remarque – On peut aussi conclure de la façon suivante : l'inégalité (11.1) prouve, par comparaison, que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{p} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx - \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx\right| &\leqslant \int_0^{+\infty} \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x)\right| dx \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{p+1}\,x}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{p+1}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

II. Intégrales à paramètre

Dans la première partie, nous avons donné des résultats de convergence pour des suites définies par une intégrale de la forme $\displaystyle\int_I f_n(t)\, dt$ où la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f.

Écrivons $f_n(t) = f(n,t)$ et remplaçons la variable discrète n par une variable continue x : on considère alors des intégrales du type

$$F(x) = \int_I f(x,t)\, dt,$$

vues comme fonctions du paramètre x. On peut alors très naturellement se demander, comme on l'a fait dans le cas discret, comment se comporte cette intégrale en fonction de x.

En sciences, les intégrales à paramètres sont utilisées notamment pour créer des transformations sur les fonctions : si f est une fonction, on définit (sous certaines conditions) :

• La transformée de Laplace de f, qui est la fonction définie par

$$\mathscr{L} f(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt.$$

Elle est très utilisée en sciences industrielles.

• La transformée de Fourier de f, qui est la fonction définie par

$$\mathscr{F} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt.$$

Elle joue un rôle fondamental en physique et mathématiques.

Dans cette partie, A et I désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$ (A pour la variable x, I pour la variable d'intégration t).

1. Théorème de continuité

Théorème – Continuité pour les intégrales à paramètre

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. On fait les hypothèses suivantes :

- Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
- Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\, dt$ est définie et continue sur A.

Remarques

• On fait souvent référence à ce théorème comme « théorème de continuité sous le signe $\int$ ».

• La dernière hypothèse est appelée hypothèse de domination, comme dans le cas discret.

• Comme dans le cas discret, il est bien entendu essentiel que φ ne dépende pas du paramètre, ici x.

Démonstration (non exigible) – Tout d'abord, F est bien définie car pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, par comparaison et d'après l'hypothèse de domination. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, il suffit de montrer que pour tout $a \in A$, et toute suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers a, on a

$$\int_I f(a_n,t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(a,t)\,dt.$$

Par cette remarque, on est donc ramené au cadre d'application du théorème de convergence dominée. Notons en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \mapsto f(a_n,t)$. Alors g_n est continue par morceaux sur I pour tout n, la suite (g_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $g : t \mapsto f(a,t)$, par continuité de f par rapport à sa première variable. Enfin, (g_n) est dominée par la fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I. On en déduit le résultat. $\square$

Cette démonstration n'est pas difficile, mais il faut garder à l'esprit qu'elle utilise le théorème de convergence dominée, que nous avons admis, et qui est un résultat délicat.

Remarque – La continuité étant une notion locale, les hypothèses portant sur la première variable x peuvent être localisées aux segments de A, ce qui peut éviter des problèmes dus aux extrémités de A. Dans le théorème précédent, on peut ainsi remplacer l'hypothèse de domination par :

- pour tout segment $J \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in J \times I$,

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

La conclusion reste valide.

Exemples

- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{x+t^3}$ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$ car

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{x+t^3} \leqslant \frac{1}{t^3},$$

et $t \mapsto 1/t^3$ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$ (critère des intégrales de Riemann sur $[1,+\infty[$, exposant $3 > 1$). De plus cette dernière fonction est indépendante de x, ce qui prouve l'hypothèse de domination. Enfin, pour tout $t \in [1,+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{1}{x+t^3}$ est continue sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction

$$F : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+t^3}\,dt$$

est continue sur $[0,+\infty[$.

- Dans le chapitre précédent, nous avons défini la fonction Γ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$$

pour tout $x > 0$. Examinons la continuité de Γ. La fonction

$$f : \begin{cases}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto t^{x-1}\,e^{-t} \end{cases}$$

est continue par rapport à ses deux variables. Pour tout $t > 0$,

$$\sup_{x>0} t^{x-1}\,e^{-t} = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{t} & \text{si } t \in]0,1] \\ +\infty & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Il n'y a donc pas d'hypothèse de domination sur $]0, +\infty[$. En revanche, restreignons-nous à $x \in [a,A]$ avec $0 < a < A$. Alors

$$\sup_{x\in[a,A]} t^{x-1}\, e^{-t} = \begin{cases} t^{a-1}\, e^{-t} & \text{si } t \in\,]0,1] \\ t^{A-1}\, e^{-t} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

La fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par la formule précédente est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et intégrable (mêmes arguments que pour l'existence de $\Gamma(x)$ pour $x > 0$), elle vérifie l'hypothèse de domination sur $[a,A]$. On en déduit que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Classe $\mathcal{C}^1$

Définition

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. Si, pour un certain $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, alors pour tout $x_0 \in A$, le nombre dérivé de $x \mapsto f(x,t)$ en x_0 est noté $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$. Si cela est vrai quel que soit $t \in I$, on obtient ainsi une fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t),$$

appelée **dérivée partielle** de f par rapport à x.

On définit de façon analogue la dérivée partielle de f d'ordre $k \geqslant 2$ par rapport à x, notée $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

Exemple – Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ définie par : pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $f(x,t) = t^x$. Pour tout $t > 0$, la fonction

$$x \mapsto t^x = e^{x\ln(t)}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (exponentielle). La fonction f admet donc une dérivée partielle par rapport à x ; de plus, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)\, e^{x\ln(t)} = \ln(t)\, t^x.$$

Théorème – Classe $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètre

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. On fait les hypothèses suivantes :

- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.
- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\, dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et pour tout $x \in A$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

Remarques

• On fait souvent référence à ce théorème comme « théorème de dérivation sous le signe $\int$ ». La formule donnant l'expression intégrale de la dérivée est parfois appelée formule de Leibniz.

• On a fait en sorte que les hypothèses fondamentales du théorème précédent soient vérifiées par la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

• À nouveau, on peut remplacer l'hypothèse de domination pour $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ par une version locale sur tout segment pour la variable x.

Démonstration (non exigible) – Tout d'abord, la fonction F est définie sur A car $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I pour tout $x \in A$. Soit $a \in A$; pour montrer que F est dérivable en a avec

$$F'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt,$$

il suffit de montrer que pour toute suite (a_n) d'éléments de A distincts de a convergeant vers a,

$$\frac{F(a_n) - F(a)}{a_n - a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt,$$

cette dernière intégrale étant convergente car $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, par comparaison et d'après l'hypothèse de domination. Par linéarité de l'intégrale, ce taux de variations est égal à

$$\int_I \frac{f(a_n,t) - f(a,t)}{a_n - a}\, dt.$$

Définissons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n : t \mapsto \frac{f(a_n,t) - f(a,t)}{a_n - a}.$$

La suite (g_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement sur I vers la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ par définition d'une dérivée partielle, cette fonction étant continue par morceaux sur I.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$,

$$|g_n(t)| \leqslant \sup_{x \in J_n} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right|,$$

d'après l'inégalité des accroissements finis, J_n désignant le segment $[a_n,a]$ ou $[a,a_n]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, $|g_n(t)| \leqslant \varphi(t)$, ce qui prouve l'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée. On en déduit finalement que

$$\int_I g_n(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt,$$

ce qui est le résultat voulu. Enfin, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A d'après le théorème de continuité sous le signe $\int$. □

Exemple – Calculons, pour tout $x > 0$,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-xt}\, dt.$$

Pour cela, définissons pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[^2$,

$$f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-xt}.$$

Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue, et intégrable sur $]0,+\infty[$: si $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| e^{-xt} \leqslant e^{-xt}$$

l'application $t \mapsto e^{-xt}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$; on a de plus un faux problème en 0 car

$$\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

Pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\, e^{-xt}.$$

Fixons $a > 0$ et restreignons-nous à $x \geqslant a$. L'application $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t > 0$ et $x \geqslant a$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\sin(t)|\; e^{-at} \leqslant e^{-at}.$$

Ce majorant définit une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ et indépendante de $x \geqslant a$, ce qui montre que l'hypothèse de domination locale est satisfaite. Le théorème de dérivation sous le signe intégral montre alors que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. De plus pour tout $x > 0$,

$$I'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt}\, dt.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\int_0^A \sin(t)\, e^{-xt}\, dt = \mathcal{I}m\left(\int_0^A e^{(i-x)t}\, dt\right)$$

avec

$$\int_0^A e^{(i-x)t}\, dt = \left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^A = \frac{e^{(i-x)A}-1}{i-x} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{1+x^2}.$$

D'après la caractérisation de la limite à l'aide des parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt}\, dt = \frac{1}{1+x^2}$$

(pour le calcul de l'intégrale précédente, on aurait aussi pu effectuer deux intégrations par parties successives).

Finalement, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$,

$$I'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,

$$I(x) = -\arctan(x) + k.$$

On remarque également que $I(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. En effet, l'application

$$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$$

est bornée sur $]0,+\infty[$, car elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 en $+\infty$. Soit M un majorant de sa valeur absolue sur $]0,+\infty[$. Alors pour tout $x > 0$,

$$|I(x)| \leqslant M \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{M}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sachant de plus que

$$-\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2},$$

on en déduit que $k = \dfrac{\pi}{2}$, d'où, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-xt}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

La fonction I est la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. Grâce à ce calcul, on peut montrer, en faisant tendre x vers 0^+, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

3. Classe $\mathcal{C}^k$

On peut généraliser le résultat du paragraphe précédent aux dérivées d'ordre supérieur, en raisonnant par récurrence :

Théorème – Classe $\mathcal{C}^k$ pour les intégrales à paramètre

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction et $k \geqslant 2$ un entier. On fait les hypothèses suivantes :

- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A.
- Pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
- Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\, dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, pour tout $x \in A$,

$$F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\, dt.$$

On peut remplacer l'hypothèse de domination pour $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ par une version locale sur tout segment pour la variable x.

Pour prouver la classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de prouver la classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ou au moins pour des valeurs de k arbitrairement grandes).