T.D. 8 – Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

1. © <u>*Polynômes orthogonaux - généralités*</u> : soient a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($a < b$) et ω une application continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}^+$, s'annulant en un nombre fini de points et telle que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)\omega(t)$ soit intégrable sur $]a, b[$.

a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad (P|\,Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\mathrm{d}t.$$

b) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite orthormalisée de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la méthode de Schmidt pour ce produit scalaire. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, e_n est scindé, à racines simples, toutes éléments de $]a, b[$.

(On pourra poser $Q = \prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)$, où les α_k sont les racines d'ordre impair de e_n appartenant à $]a, b[$, puis s'intéresser au produit $Q \times e_n$ pour montrer que $p = n$.)

2. © Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien réel E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall u \in E \quad \|p(u)\| \leq \|u\|.$$

3. © <u>*Déterminant de Gram*</u> : soit E un espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq \dim E$, $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale directe d'un sous-espace orienté de E contenant $u_1, \ldots, u_n$; on note A la matrice du système $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $G(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice $((u_i|u_j))_{1\leq i,j\leq n}$, appelée *matrice de Gram* du système $(u_1, \ldots, u_n)$.

a) Montrer que $G(u_1, \ldots, u_n) = {}^tAA$. En déduire, lorsque $n = \dim E$, la propriété du produit mixte :

$$[u_1, \ldots, u_n]^2 = \det G(u_1, \ldots, u_n)$$

b) Montrer que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left({}^tAA\right)$; en déduire : $\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \operatorname{rg} G(u_1, \ldots, u_n)$.

c) Soit F un sous-espace strict de E muni d'une base $(b_1, \ldots, b_p)$ et v un vecteur de E. Montrer que la distance d de v à F est donnée par :

$$d^2 = \frac{\det G(b_1, \ldots, b_p, v)}{\det G(b_1, \ldots b_p)}.$$

4. Soit E un espace vectoriel euclidien, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq \dim E$ et $(e_k)_{1\leq k\leq p} \in E^p$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall u \in E \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (e_k|u)^2$

(ii) $\forall u \in E \quad u = \sum_{k=1}^{p} (e_k|u)\,.e_k$

(iii) $(e_k)_{1\leq k\leq p}$ est une base orthonormale de E.

5. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni de sa structure euclidienne canonique.

Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p sur le plan F d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

6. Déterminer : $\inf\left\{\int_0^{\pi/2} (a\cos x + b\sin x - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

7. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})$ donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer :

$$\inf\left\{\sum_{1\leq i,j\leq n} (m_{i,j} - a_{i,j})^2,\ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{S}\right\}.$$

8. Soit E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) s est une symétrie orthogonale (*i.e.* $G = F^{\perp}$) ;

b) s est un automorphisme orthogonal ;

c) s est un endomorphisme symétrique.

9. © *Décomposition QR* : soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R ("*right triangular*") telles que $A = QR$ *(on pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt)*.

Programmer en Python la détermination de Q et de R.

Quel est l'intérêt de cette décomposition pour la résolution du système linéaire $AX = B$?

10. © *Double produit vectoriel*

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté E, de dimension 3.

Montrer que : $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$.

En déduire la formule du double produit vectoriel

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right).\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right).\vec{a}.$$

Application : division vectorielle

Résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{u} \in E$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant donnés dans E.

11. © *Expression intrinsèque d'une rotation* : soit E une espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\vec{a}$ un vecteur unitaire de E, θ réel et r la rotation d'axe orienté par $\vec{a}$ d'angle θ. Montrer que :

$$\forall \vec{u} \in E \quad r(\vec{u}) = p(\vec{u}) + \cos\theta.q(\vec{u}) + \sin\theta.\vec{a} \wedge \vec{u}$$

où p est la projection orthogonale sur l'axe $D = \mathrm{Vect}(\vec{a})$ et $q = \mathrm{Id}_E - p$ *(on pourra commencer par le cas où $\vec{u}$ est orthogonal à l'axe)*.

Montrer comment cette relation permet d'obtenir directement la matrice de r dans une base orthonormale directe donnée.

Expliquer comment déterminer l'axe et l'angle d'une rotation donnée par sa matrice dans une base orthonormale directe *(on pourra séparer parties symétrique et antisymétrique)*.

12. Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r\left(\vec{i}\right) = -\vec{j}$ et $r(\vec{u}) = \vec{u}$; préciser sa matrice dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

13. Étant données r et R, deux rotations de $\mathbb{R}^3$, reconnaître $r \circ R \circ r^{-1}$.

À quelle condition r et R commutent-elles ?

14. Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

15. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $(U_1, \ldots, U_n)$ dans $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}_n \quad {}^tU_kU_k = 1 \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_k {}^tU_k.$$

16. © *Racine carrée d'une matrice symétrique positive* : soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive.

Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive, telle que $R^2 = S$.