

Chapitre 15

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Dans ce chapitre, sauf indication contraire, $(E, (\cdot | \cdot))$ désigne un espace euclidien de dimension n et $\| \cdot \|$ la norme associée.

I. Isométries vectorielles

1. Définition, propriétés, caractérisations

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une **isométrie vectorielle** si u conserve la norme, c'est-à-dire si

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Exemple – Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$(aX^2 + bX + c | \alpha X^2 + \beta X + \gamma) = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

soit u l'endomorphisme défini par :

$$u(aX^2 + bX + c) = \frac{b+c}{\sqrt{2}}X^2 + aX + \frac{b-c}{\sqrt{2}}.$$

Alors u est une isométrie vectorielle car, pour tout $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\|u(P)\|^2 = \frac{1}{2}(b^2 + 2bc + c^2) + a^2 + \frac{1}{2}(b^2 - 2bc + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 = \|P\|^2,$$

donc en prenant la racine carrée, on obtient que u conserve la norme.

Propriété

Une isométrie vectorielle est un automorphisme.

Démonstration – L'espace E étant de dimension finie, il suffit de montrer que u est injectif. Or, si $u(x) = 0_E$, alors par conservation de la norme, $\|x\| = \|u(x)\| = 0$ et donc $x = 0_E$, d'où le résultat. \square

Remarque – Les isométries vectorielles sont également appelées **automorphismes orthogonaux**.

Attention ! En général, une projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal : elle ne conserve pas la norme et n'est pas bijective.

Propriété/Définition

L'ensemble des isométries vectorielles de E est appelé **groupe orthogonal** de E , et noté $\mathcal{O}(E)$.

On a notamment :

- Si u et v sont deux éléments de $\mathcal{O}(E)$, alors $u \circ v \in \mathcal{O}(E)$.
- Si $u \in \mathcal{O}(E)$, $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Démonstration

- Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \|v(x)\| = \|(u \circ v)(x)\|$ car u et v sont des isométries vectorielles donc conservent la norme. On en déduit que $u \circ v$ conserve la norme, c'est donc une isométrie vectorielle.
- Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \|(u \circ u^{-1})(x)\| = \|u^{-1}(x)\|$ car u conserve la norme. On en déduit que u^{-1} conserve la norme, c'est donc une isométrie vectorielle. \square

Propriété

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour que u soit une isométrie vectorielle, il faut et il suffit que u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire, que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (u(x) | u(y)) = (x | y).$$

Démonstration

\Leftarrow Si u conserve le produit scalaire, pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\|^2 = (u(x) | u(x)) = (x | x) = \|x\|^2 \quad \text{et donc} \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On en déduit que u est une isométrie vectorielle.

\Rightarrow Si u conserve la norme, on montre que u conserve le produit scalaire à l'aide de l'identité de polarisation : pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$(u(x) | u(y)) = \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) = \frac{1}{4} (\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2),$$

par linéarité de u . Comme u conserve la norme, on a donc

$$(u(x) | u(y)) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = (x | y).$$

D'où la conservation du produit scalaire. \square

Propriété

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est une isométrie vectorielle.
- L'image par u de la base orthonormée \mathcal{B} de E est une base orthonormée de E .

Démonstration – On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

\Rightarrow Si u est une isométrie vectorielle, alors u conserve le produit scalaire, et donc pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$,

$$(u(e_i) | u(e_j)) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j}.$$

La famille $u(\mathcal{B})$ est donc une base orthonormée de E : elle est orthonormée, donc libre, et est composée de n vecteurs en dimension n .

⇐ On suppose que $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E . Si

$$x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n \quad \text{et} \quad y = y_1e_1 + \dots + y_n e_n$$

sont deux vecteurs de E , alors

$$u(x) = x_1u(e_1) + \dots + x_n u(e_n) \quad \text{et} \quad u(y) = y_1u(e_1) + \dots + y_n u(e_n),$$

donc les coordonnées de $u(x)$ et $u(y)$ dans la base $u(\mathcal{B})$ sont les mêmes que celles de x et y dans la base \mathcal{B} . L'expression du produit scalaire dans une base orthonormée montre donc que $(u(x) | u(y)) = (x | y)$. Donc u est une isométrie vectorielle. \square

Propriété

Soit u une isométrie vectorielle de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors F^\perp est stable par u .

Démonstration – L'application u est un isomorphisme, donc $\dim(u(F)) = \dim(F)$. Sachant de plus que $u(F) \subset F$ car F est stable par u , on a $u(F) = F$.

Soit $x \in F^\perp$; on veut montrer que $u(x) \in F^\perp$. Soit donc $y \in F$; d'après ce qui précède, il existe $z \in F$ tel que $y = u(z)$. Alors, par conservation du produit scalaire,

$$(u(x) | y) = (u(x) | u(z)) = (x | z) = 0$$

car $x \in F^\perp$ et $z \in F$. Donc $u(x)$ est orthogonal à tout vecteur de F : $u(x) \in F^\perp$. Ceci étant vrai pour tout $x \in F^\perp$, on a le résultat voulu. \square

2. Matrices orthogonales

Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle.

On dit que M est **orthogonale** si l'endomorphisme u_M canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle pour la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Propriété

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. M est une matrice orthogonale.
2. ${}^t M M = I_n$.
3. $M {}^t M = I_n$.
4. M est inversible et $M^{-1} = {}^t M$.
5. Les colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Dans ce cas, elles en forment une base orthonormée.
6. Les lignes de M forment une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Dans ce cas, elles en forment une base orthonormée.

Démonstration – Soit $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$1 \Leftrightarrow 2$: La matrice M est orthogonale si et seulement si u_M conserve le produit scalaire, ce qui équivaut au fait que pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$,

$$(u_M(X) | u_M(Y)) = (X | Y).$$

Or, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$,

$$(u_M(X) | u_M(Y)) = {}^t(MX)(MY) = {}^tX({}^tMM)Y \quad \text{et} \quad (X | Y) = {}^tXY.$$

Si ${}^tMM = I_n$, M est donc orthogonale; réciproquement, si M est orthogonale, en choisissant pour X et Y les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient ${}^tMM = I_n$.

$2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$: C'est un résultat du chapitre **Matrices**.

$2 \Leftrightarrow 5$: Notons C_1, \dots, C_n les colonnes de M . Le coefficient en position (i, j) dans la matrice tMM est ${}^tC_i C_j$, c'est-à-dire $(C_i | C_j)$. On en déduit que ${}^tMM = I_n$ si et seulement si pour tout (i, j) , $(C_i | C_j) = \delta_{i,j}$, c'est-à-dire, si et seulement si (C_1, \dots, C_n) est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans ce cas, sachant de plus que cette famille est composée de $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$3 \Leftrightarrow 6$: On raisonne de la même façon, le coefficient en position (i, j) dans la matrice $M{}^tM$ étant $(L_i | L_j)$, où L_1, \dots, L_n sont les lignes de M . □

Propriété/Définition

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est appelé **groupe orthogonal** d'ordre n , et noté $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tMM = I_n\}.$$

L'ensemble $\mathcal{O}(n)$ est stable par produit et passage à l'inverse.

Démonstration – Si $M \in \mathcal{O}(n)$ et $N \in \mathcal{O}(n)$,

$${}^t(MN)(MN) = {}^tN{}^tMMN = {}^tNN = I_n,$$

donc $MN \in \mathcal{O}(n)$. De plus,

$${}^t(M^{-1})M^{-1} = ({}^tM)^{-1}M^{-1} = (M{}^tM)^{-1} = I_n,$$

donc $M^{-1} \in \mathcal{O}(n)$. □

Propriété – Lien entre isométries vectorielles de E et matrices orthogonales

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est une isométrie vectorielle.
- La matrice M de u dans la base orthonormée \mathcal{B} est orthogonale.

Démonstration – L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$(u(x) | u(y)) = (x | y).$$

Si X et Y sont les vecteurs-colonnes des coordonnées de x et y dans la base orthonormée \mathcal{B} , alors

$$(u(x) | u(y)) = {}^t(MX)(MY) = {}^tX({}^tMM)Y \quad \text{et} \quad (x | y) = {}^tXY.$$

Or, lorsque x et y parcourent E , X et Y parcourent $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et réciproquement. Ainsi, u est une isométrie vectorielle si et seulement si pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$,

$${}^tX({}^tMM)Y = {}^tXY,$$

c'est-à-dire, si et seulement si M est orthogonale (voir la démonstration de $1 \Leftrightarrow 2$ ci-dessus). □

Exemple – La matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est orthogonale, car la famille (C_1, C_2, C_3) de ses colonnes vérifie les relations $(C_i | C_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$.

En particulier, tout endomorphisme d'un espace euclidien de dimension 3, dont la matrice est M dans une base orthonormée, est une isométrie vectorielle. C'est notamment le cas de l'endomorphisme u du premier exemple du chapitre, car sa matrice dans la base orthonormée $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est M .

Propriété

Les matrices orthogonales sont exactement les matrices de changement de base orthonormée : si \mathcal{B} est une base orthonormée de E et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'une famille \mathcal{F} de vecteurs de E dans la base \mathcal{B} , alors P est une matrice orthogonale si et seulement si \mathcal{F} est une base orthonormée de E .

Démonstration – Avec les notations de la propriété, soit u l'endomorphisme de E ayant P pour matrice dans la base \mathcal{B} . La matrice P est orthogonale si et seulement si u est une isométrie vectorielle, ce qui équivaut au fait que $u(\mathcal{B})$, *i.e.* \mathcal{F} , soit une base orthonormée de E . \square

Remarque – En particulier, si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées de E , et si P désigne la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = {}^t P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P.$$

Propriété

Si $M \in \mathcal{O}(n)$, alors $\det(M) = \pm 1$. De même, si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Démonstration – Une matrice orthogonale M vérifie ${}^t M M = I_n$ donc $\det({}^t M) \det(M) = 1$. Or $\det({}^t M) = \det(M)$, donc $\det(M)^2 = 1$ et $\det(M) = \pm 1$.

Si $u \in \mathcal{O}(E)$, on raisonne matriciellement dans une base orthonormée. \square

Remarque – Bien sûr, la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

elle a pour déterminant 1 mais n'est pas orthogonale : ses deux colonnes ne sont pas orthogonales pour le produit scalaire canonique.

Propriété/Définition

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1, est appelé **groupe spécial orthogonal** d'ordre n , noté $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Il est stable par produit et passage à l'inverse.

Démonstration – On sait déjà que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et passage à l'inverse. De plus, si $M \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(MN) = \det(M) \det(N) = 1 \quad \text{et} \quad \det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1} = 1,$$

d'où le résultat. \square

Définition

Si E est de dimension 2 ou 3, un élément de $\mathcal{O}(E)$ de déterminant 1 est appelé **rotation** de E .

II. Endomorphismes symétriques

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **symétrique** si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (u(x) | y) = (x | u(y)).$$

Propriété – Lien entre endomorphismes symétriques et matrices symétriques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est symétrique.
- La matrice M de u dans la base orthonormée \mathcal{B} est symétrique, c'est-à-dire vérifie ${}^tM = M$.

Démonstration – L'endomorphisme u est symétrique si et seulement si pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$(u(x) | y) = (x | u(y)).$$

Si X et Y sont les vecteurs-colonnes des coordonnées de x et y dans la base orthonormée \mathcal{B} , alors

$$(u(x) | y) = {}^t(MX)Y = {}^tX{}^tMY \quad \text{et} \quad (x | u(y)) = {}^tX(MY) = {}^tXMY.$$

Or, lorsque x et y parcourent E , X et Y parcourent $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et réciproquement. Ainsi, u est symétrique si et seulement si pour tout $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$,

$${}^tX{}^tMY = {}^tXMY,$$

c'est-à-dire, si et seulement si ${}^tM = M$. □

Exemple – La projection orthogonale p sur un sous-espace vectoriel F de E est symétrique. En effet, dans une base orthonormée de E adaptée à la décomposition

$$E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(p)^\perp,$$

la matrice de p est (en notant $r = \text{rg}(p)$)

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix};$$

elle est symétrique.

Attention ! Pour utiliser ce résultat, il est essentiel que \mathcal{B} soit orthonormée, de même que dans la propriété sur le lien entre isométries vectorielles et matrices orthogonales.

Les endomorphismes symétriques ont des propriétés remarquables vis-à-vis de la réduction des endomorphismes :

Théorème spectral

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres pour u .

Démonstration (non exigible)

On procède par récurrence sur $n = \dim(E)$. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car tout vecteur de E de norme 1 est vecteur propre de u . Si le résultat est vrai en dimension $n - 1$ avec $n \geq 2$, soit u un endomorphisme symétrique de E , espace euclidien de dimension n .

• Soit M la matrice de u dans une base orthonormée quelconque. Sachant que u est symétrique et que M est sa matrice dans une base orthonormée, M est symétrique. La matrice M est réelle, mais on peut la considérer comme matrice complexe et à ce titre, M possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé; on va calculer ${}^t X M \bar{X}$ de deux façons : tout d'abord, M étant réelle,

$${}^t X M \bar{X} = {}^t X \overline{M \bar{X}} = {}^t X \overline{\lambda \bar{X}} = \bar{\lambda} {}^t X \bar{X}.$$

De plus, M étant symétrique,

$${}^t X M \bar{X} = {}^t X {}^t M \bar{X} = {}^t (M X) \bar{X} = {}^t (\lambda X) \bar{X} = \lambda {}^t X \bar{X}.$$

Mais, en notant x_1, \dots, x_n les coefficients de X , on a

$${}^t X \bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$$

car $X \neq 0$. On en déduit que $\bar{\lambda} = \lambda$, *i.e.*, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, u possède une valeur propre réelle λ .

• Soit e_1 un vecteur propre associé. Quitte à diviser e_1 par sa norme (qui est non nulle), on peut supposer e_1 unitaire.

Notons $F = \text{Vect}(e_1)^\perp$; il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E de dimension n . De plus, F est stable par u : en effet, si $x \in F$, alors

$$(u(x) | e_1) = (x | u(e_1))$$

car u est symétrique. Or $u(e_1) = \lambda e_1$, donc

$$(u(x) | e_1) = \lambda (x | e_1) = 0$$

car $x \in F = \text{Vect}(e_1)^\perp$. On a finalement $(u(x) | e_1) = 0$, et donc $u(x) \in \text{Vect}(e_1)^\perp = F$.

On peut donc considérer l'endomorphisme $u|_F$ de F induit par u ; F est bien sûr un espace euclidien par restriction du produit scalaire de E , et $u|_F$ est symétrique de même que u . Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée (e_2, \dots, e_n) de F constituée de vecteurs propres pour $u|_F$, et donc pour u . Alors, sachant que $E = \text{Vect}(e_1) \oplus F$ (cette somme étant orthogonale), on obtient que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E de vecteurs propres pour u , ce qui prouve l'hérédité. \square

Remarques

- En particulier, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, u possède n valeurs propres réelles (χ_u est scindé dans \mathbb{R}). Ces valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes.
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique, les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

En effet, soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u , x et y deux vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres. Alors

$$(u(x) | y) = (\lambda x | y) = \lambda (x | y).$$

Mais u étant symétrique, on a aussi

$$(u(x) | y) = (x | u(y)) = (x | \mu y) = \mu (x | y).$$

Sachant que $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $(x | y) = 0$, et donc $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$. \square

Matriciellement, le théorème spectral s'interprète de la façon suivante :

Théorème spectral (matriciel)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Alors M est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale, c'est-à-dire qu'il existe :

- une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M ,
- une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}(n)$ dont les colonnes constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire canonique) de vecteurs propres pour M ,

telles que

$$M = P D {}^tP.$$

Démonstration – On applique le théorème spectral à l'endomorphisme u_M canoniquement associé à M : il existe une base orthonormée \mathcal{B} de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour M . Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base \mathcal{B} ; P est une matrice orthogonale car c'est une matrice de changement de bases orthonormées, donc $P^{-1} = {}^tP$. La formule $M = P D {}^tP$ est alors une conséquence des formules de changement de base. \square

Attention ! Une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable, comme le montre l'exemple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique X^2 ; si elle était diagonalisable, elle serait nulle.

Exemple – La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale. Comme de plus elle est de rang 1, on sait que 0 est valeur propre double de A . Une base orthonormée de $E_0(A)$, qui est le plan d'équation $x + y + z = 0$, est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Dans ce cas particulier, on sait alors que le second espace propre est $E_0(A)^\perp$, c'est une droite vectorielle dirigée par le vecteur normal ${}^t(1 \ 1 \ 1)$ à $E_0(A)$, dont on constate qu'il est vecteur propre pour A associé à la valeur propre 3 (ce que l'on pouvait remarquer directement car la somme des coefficients de chaque ligne de A est 3). En posant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

on obtient une matrice orthogonale telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} {}^tP.$$

On remarquera que dans ce cas, on n'a pas à calculer P^{-1} , il suffit de transposer P . Attention cependant, pour pouvoir affirmer ceci, il faut bien prendre soin de vérifier que P est effectivement

orthogonale. Dans cet exemple, il était indispensable de choisir une base de $E_0(A)$ qui soit orthonormée.

Application : en Sciences Industrielles, la matrice d'inertie d'un solide dans un repère orthonormé est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale. Les droites propres pour cette matrice sont appelées axes principaux d'inertie du solide.

III. Espaces euclidiens orientés de dimension 2 et 3

1. Orientation

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées de E , et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . On sait que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et donc $\det(P) = \pm 1$, c'est-à-dire, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$. De plus,

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \det(P^{-1}) = \det(P) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Ceci permet de donner la définition suivante :

Définition – Orientation, bases orthonormées directes

- On dit que \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont la **même orientation** si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
On dit que \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont des **orientations opposées** si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$.
 - Orienter E , c'est choisir l'ensemble des bases orthonormées qui ont la même orientation qu'une base orthonormée fixée, de référence. Ces bases sont alors dites **bases orthonormées directes**.
- Les autres bases orthonormées sont dites **bases orthonormées indirectes**.

Remarques

- Les matrices de passage entre bases orthonormées directes de E sont exactement les matrices orthogonales de déterminant 1, *i.e.*, les éléments de $\mathcal{SO}(n)$: si \mathcal{B} est une base orthonormée directe de E et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'une famille \mathcal{F} de vecteurs de E dans la base \mathcal{B} , alors $P \in \mathcal{SO}(n)$ si et seulement si \mathcal{F} est une base orthonormée directe de E .
- Échanger deux vecteurs d'une base orthonormée, ou changer le sens d'un de ses vecteurs, change son orientation (c'est-à-dire son caractère direct ou indirect), d'après les propriétés du déterminant.
- On définit une relation \sim entre bases orthonormées de E de la façon suivante : si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées de E , on a $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si, par définition, \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont la même orientation. Le fait que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ contienne I_n et soit stable par produit et passage à l'inverse permet de montrer que \sim est une relation d'équivalence. Il y a exactement deux classes d'équivalence ; orienter E revient à choisir l'une de ces deux classes, ses éléments sont les bases orthonormées directes de E .

Définition – Orientation d'une droite ou d'un plan

- Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.
- Si F est une droite vectorielle ou un plan vectoriel de E , on peut orienter F comme tout espace euclidien, par le choix d'une base orthonormée de F .
 - Si P est un plan vectoriel, on peut aussi orienter P par le choix d'un vecteur unitaire a normal à P : une base orthonormée (i, j) de P est dite directe si (i, j, a) est une base orthonormée directe de E , sinon, elle est dite indirecte.

2. Produit mixte, produit vectoriel

Propriété/Définition – Produit mixte

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées directes d'un espace euclidien orienté E de dimension $n = 2$ ou $n = 3$.

Alors, pour toute famille (x_1, \dots, x_n) de vecteurs de E , on a

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n).$$

Autrement dit, le déterminant de (x_1, \dots, x_n) ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie pour le calculer.

Ce déterminant est appelé **produit mixte** de la famille (x_1, \dots, x_n) , et noté $[x_1, \dots, x_n]$.

Démonstration – Soit M la matrice de (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} , M' sa matrice dans la base \mathcal{B}' et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Alors, d'après les formules de changement de bases, $M = PM'$, d'où

$$\det(M) = \det(P) \det(M') = \det(M')$$

car P est une matrice de passage entre bases orthonormées directes, donc $P \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On en déduit le résultat car

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(M) \quad \text{et} \quad \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det(M').$$

□

Interprétation géométrique

- Si u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , $|[u, v]|$ est l'aire du parallélogramme formé sur u et v .
- De même, si u , v et w sont trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , $|[u, v, w]|$ est le volume du parallélépipède rectangle formé sur u , v et w .

On a immédiatement :

Propriété

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors :

- Échanger deux vecteurs dans un produit mixte change le signe du produit mixte.
- Le produit mixte $[u, v, w]$ est nul si et seulement si la famille (u, v, w) est liée.
- Une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E est directe si et seulement si $[e_1, e_2, e_3] = 1$.

On a les propriétés analogues en dimension 2.

Propriété/Définition – Produit vectoriel

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

Pour tout $(u, v) \in E^2$, il existe un unique vecteur de E , noté $u \wedge v$, tel que

$$\forall x \in E, \quad [u, v, x] = (u \wedge v | x). \quad (1)$$

Le vecteur $u \wedge v$ est appelé **produit vectoriel** de u et v .

Démonstration – Par linéarité du déterminant par rapport à sa troisième variable, l'application $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire sur E . Le théorème de représentation des formes linéaires sur un espace euclidien entraîne l'existence et l'unicité du vecteur vérifiant (1). □

Propriété

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E . Soient $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 \in E$ et $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 \in E$.

Alors

$$u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3.$$

En particulier, dans $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

On peut toujours se ramener à ce cas en raisonnant en coordonnées dans une base orthonormée directe de E .

Démonstration – Pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$,

$$[u, v, x] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, x) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne, on a

$$[u, v, x] = (u_2v_3 - u_3v_2)x_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)x_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)x_3.$$

La base \mathcal{B} étant orthonormée, on reconnaît le produit scalaire entre

$$(u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3$$

et x . Cette égalité étant vraie pour tout x , et $u \wedge v$ étant l'unique vecteur à la vérifier pour tout x , on a le résultat. \square

Propriété

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $(u, v) \in E^2$.

Alors :

1. $u \wedge v = -v \wedge u$.
2. Les applications $x \mapsto u \wedge x$ et $x \mapsto x \wedge v$ sont des endomorphismes de E .
3. La famille (u, v) est libre si et seulement si $u \wedge v \neq 0_E$.
4. Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et v .

Si u et v sont indépendants, $u \wedge v$ est un vecteur normal au plan vectoriel $\text{Vect}(u, v)$.

5. Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de E , on a

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2.$$

Si (e_1, e_2) est une famille orthonormée de E , alors $(e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ est une base orthonormée directe de E .

6. Pour tout $w \in E$, on a la formule : $u \wedge (v \wedge w) = (u | w)v - (u | v)w$.

Démonstration

1. Pour tout $x \in E$, par antisymétrie du déterminant,

$$[u, v, x] = -[v, u, x] = -(v \wedge u | x) = (-v \wedge u | x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a $u \wedge v = -v \wedge u$.

2, 6 et première partie de **5**. C'est immédiat en revenant aux coordonnées dans une base orthonormée directe.

Quant à la deuxième partie du point **5**, complétons (e_1, e_2) en base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de E (ce qui est possible en complétant d'abord en base orthonormée de E puis éventuellement en changeant le sens du troisième vecteur choisi). D'après ce qui précède, on a $e_1 \wedge e_2 = e_3$, d'où le résultat.

3. Si (u, v) est liée, alors pour tout $x \in E$, $[u, v, x] = 0$, et donc $(u \wedge v | x) = 0$. On en déduit que $u \wedge v = 0_E$.

Si (u, v) est libre, on peut la compléter en une base (u, v, w) de E , et donc $[u, v, w] \neq 0$, c'est-à-dire, $(u \wedge v | w) \neq 0$, ce qui entraîne que $u \wedge v \neq 0_E$.

4. On a

$$(u \wedge v | u) = [u, v, u] = 0$$

car la famille (u, v, u) contient deux fois le même vecteur. Donc $u \wedge v$ est orthogonal à u . On procède de même pour v .

Si (u, v) est libre, $u \wedge v$ est un vecteur non nul orthogonal à u et v , donc orthogonal au plan $\text{Vect}(u, v)$. C'est donc un vecteur normal à $\text{Vect}(u, v)$. \square

3. Classification des isométries vectorielles en dimension 2

Théorème – Détermination des éléments de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

On a

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}}_{=\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})} \cup \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}}_{=\{M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}); \det(M) = -1\}}.$$

Démonstration – Il est immédiat que les matrices ci-dessus sont éléments de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, car leurs colonnes forment une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique, d'après la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$. De plus, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = 1 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = -1.$$

Réciproquement, soit

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$

Sa première colonne est de norme 1, donc $a^2 + b^2 = 1$. En particulier, $a^2 \leq 1$, donc $a \in [-1, 1]$, et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$. Alors $b = \pm \sqrt{1 - a^2} = \pm \sin(\theta)$, mais quitte à changer θ en $-\theta$, ce qui ne modifie pas la valeur de $\cos(\theta)$, on peut supposer que $b = \sin(\theta)$.

La deuxième colonne de M est orthogonale à la première. Or, $(a, b) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \neq (0, 0)$, donc

$$\left(\text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right)^\perp$$

est une droite vectorielle; or elle contient le vecteur non nul $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$, et ainsi

$$\left(\text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right)^\perp = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

En particulier, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\lambda \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \lambda \cos(\theta) \end{pmatrix} = \lambda.$$

Or $\det(M) = \pm 1$; on obtient les formes indiquées dans chaque cas. \square

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice de rotation** d'angle de mesure θ .

On remarquera que, pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R(\theta) = R(\theta')$ si et seulement si $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta); \theta \in \mathbb{R}\} = \{R(\theta); \theta \in]-\pi, \pi]\}.$$

Propriété

- Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
- $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif pour le produit matriciel : pour tout $(A, B) \in (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}))^2$, on a $AB = BA$.

Démonstration

- On a

$$\begin{aligned} R(\theta)R(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta)\cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = R(\theta + \theta'). \end{aligned}$$

- Soit $(A, B) \in (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}))^2$. D'après le théorème précédent, il existe $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $A = R(\theta)$ et $B = R(\theta')$. Alors d'après le premier point,

$$AB = R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta' + \theta) = R(\theta')R(\theta) = BA. \quad \square$$

Théorème – Classification des isométries vectorielles en dimension 2

Soit E un plan euclidien orienté.

1. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $\det(u) = 1$ (i.e., une rotation de E).

Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de u dans toute base orthonormée directe de E soit $R(\theta)$. Le réel θ n'est pas unique, mais unique modulo 2π .

On dit que θ est une **mesure de l'angle** de la rotation u .

On retrouve facilement les mesures θ de l'angle d'une rotation u de E à l'aide des formules suivantes, valables pour tout vecteur unitaire $x_0 \in E$:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{Tr}(u) = (x_0 | u(x_0)) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [x_0, u(x_0)].$$

2. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $\det(u) = -1$.

Alors u est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(u - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{Id})^\perp$ (i.e., la réflexion par rapport à $\text{Ker}(u - \text{Id})$).

Dans toute base adaptée à la décomposition $E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - \text{Id})^\perp$, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration

1. Si $u \in \mathcal{O}(E)$ vérifie $\det(u) = 1$, sa matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est un élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$. Si $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une autre base orthonormée directe de E , alors la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est un élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, donc d'après les formules de changement de base et la commutativité de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P = P^{-1} P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta).$$

La matrice de u dans toute base orthonormée directe de E est donc $R(\theta)$. Le réel θ est unique modulo 2π car $R(\theta) = R(\theta')$ si et seulement si $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

On a alors

$$\text{Tr}(u) = \text{Tr}(R(\theta)) = 2 \cos(\theta), \quad \text{d'où} \quad \cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{Tr}(u).$$

Soit $x_0 = \alpha e_1 + \beta e_2$ un vecteur unitaire de E . Alors la matrice colonne des coordonnées de $u(x_0)$ dans la base \mathcal{B} est

$$R(\theta) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) \\ \alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La base \mathcal{B} étant orthonormée,

$$(x_0 | u(x_0)) = \alpha(\alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta)) + \beta(\alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta)) = (\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta) = \cos(\theta)$$

car x_0 est unitaire et \mathcal{B} orthonormée. De plus,

$$[x_0, u(x_0)] = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) \\ \beta & \alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta) \end{vmatrix} = \alpha(\alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta)) - \beta(\alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta)) = \sin(\theta).$$

2. Si $u \in \mathcal{O}(E)$ vérifie $\det(u) = -1$, sa matrice dans la base orthonormée directe \mathcal{B} est un élément de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ de déterminant -1 , donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}^2 = I_2,$$

donc u est une symétrie. On sait que u est diagonalisable avec $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$, mais sachant que $\dim(E) = 2$ et que $\det(u) = -1$, on a $\text{Sp}(u) = \{-1, 1\}$, les valeurs propres 1 et -1 étant simples. Les espaces propres $\text{Ker}(u - \text{Id})$ et $\text{Ker}(u + \text{Id})$ sont donc des droites vectorielles. Enfin, ils sont orthogonaux, car si $x \in \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $y \in \text{Ker}(u + \text{Id})$, alors par conservation du produit scalaire,

$$(x | y) = (u(x) | u(y)) = (x | -y) = -(x | y),$$

et donc $(x | y) = 0$. Ainsi, u est la symétrie par rapport à la droite $\text{Ker}(u - \text{Id})$ parallèlement à la droite $\text{Ker}(u + \text{Id}) = \text{Ker}(u - \text{Id})^\perp$. L'écriture matricielle dans toute base adaptée à la décomposition $E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - \text{Id})^\perp$ est alors immédiate. \square

Propriété

Soit E un plan euclidien orienté et $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Soit u la rotation d'angle de mesure θ et u' la rotation d'angle de mesure θ' .

Alors $u \circ u' = u' \circ u$ est la rotation d'angle de mesure $\theta + \theta'$.

Démonstration – Il suffit de raisonner matriciellement dans une base orthonormée directe de E . La matrice de u dans cette base est $R(\theta)$, celle de u' , $R(\theta')$. Or, d'après une propriété donnée plus haut,

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta) = R(\theta + \theta'),$$

d'où le résultat. \square

Propriété – Écriture complexe d'une rotation

Soit E un plan euclidien orienté et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe de E . On identifie E à \mathbb{C} , grâce à l'application bijective

$$\phi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{C} \\ \alpha e_1 + \beta e_2 & \mapsto \alpha + i\beta \end{cases}$$

Alors la rotation u d'angle de mesure θ a pour expression complexe

$$z \mapsto e^{i\theta} z,$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $\phi(u(x)) = e^{i\theta} \phi(x)$.

Démonstration – Pour tout $x = \alpha e_1 + \beta e_2 \in E$, la matrice-colonne des coordonnées de $u(x)$ dans la base \mathcal{B} est

$$R(\theta) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) \\ \alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

et donc

$$\phi(u(x)) = [\alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta)] + i[\alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta)].$$

De plus,

$$e^{i\theta} \phi(x) = [\cos(\theta) + i \sin(\theta)][\alpha + i\beta],$$

ce qui donne le même résultat après développement. \square

4. Réduction des isométries vectorielles en dimension 3

Théorème – Réduction des isométries vectorielles en dimension 3

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$; on note $\varepsilon = \det(u)$ ($\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$).

• On est dans l'un et un seul des cas suivants :

1. $u = \varepsilon \text{Id}$.

2. L'ensemble $\text{Ker}(u - \varepsilon \text{Id})$ est une droite vectorielle. En notant D cette droite, alors le plan D^\perp est stable par u et l'endomorphisme de D^\perp induit par u est une rotation.

Si a est un vecteur unitaire dirigeant la droite D , alors en orientant D^\perp par le choix du vecteur normal a , on peut considérer une mesure θ de l'angle de cette rotation. La matrice de u dans toute base orthonormée directe de E de la forme (e_1, e_2, a) est alors

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

• **Pour les rotations** ($\varepsilon = 1$) : D est l'ensemble des vecteurs invariants par u ; on dit que u est une rotation d'**axe** D , et, D^\perp étant orienté par a , que θ est une **mesure de l'angle** de u .

On détermine alors entièrement θ (modulo 2π) par les formules suivantes, dans lesquelles x_0 désigne un vecteur unitaire orthogonal à a :

$$\text{Pour déterminer } \cos(\theta) : \quad \text{Tr}(u) = 2 \cos(\theta) + 1, \quad \cos(\theta) = (x_0 | u(x_0)),$$

$$\text{Pour déterminer } \sin(\theta) : \quad x_0 \wedge u(x_0) = (\sin(\theta)) a, \quad \sin(\theta) = [x_0, u(x_0), a].$$

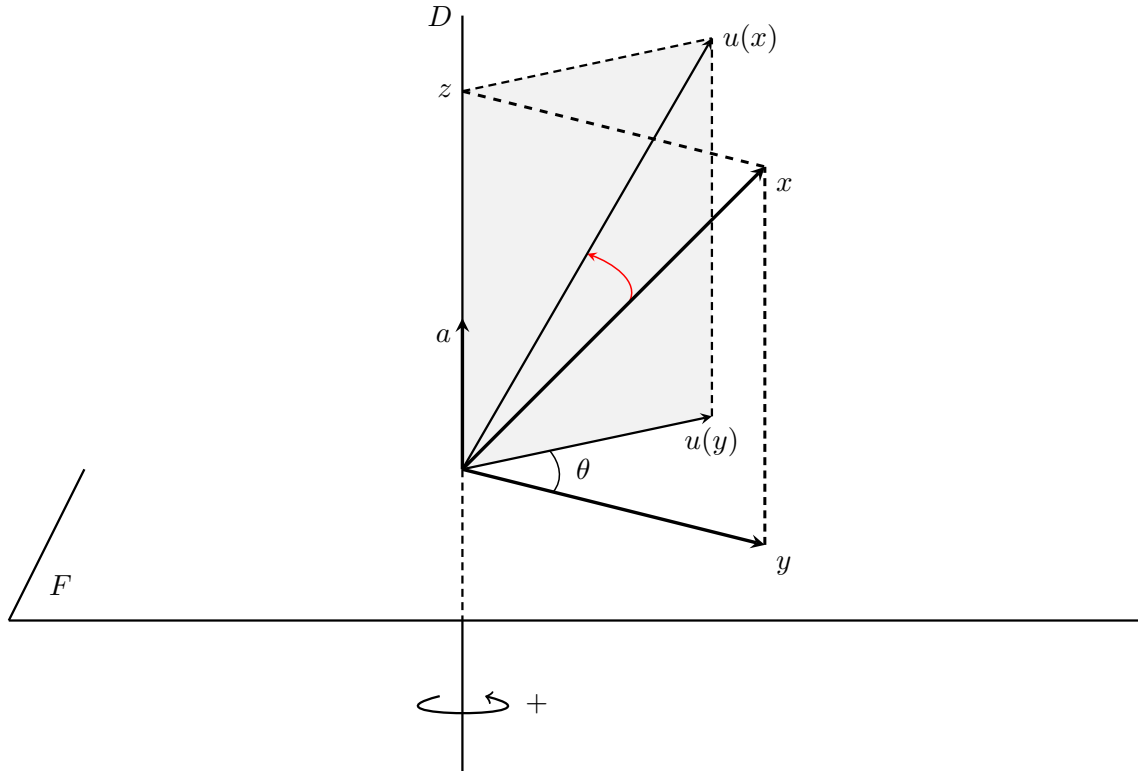
Enfin, pour tout $x \in E$, l'image de x par u est donnée explicitement par la formule

$$u(x) = \cos(\theta)[x - (a | x) a] + \sin(\theta) a \wedge x + (a | x) a.$$

La figure ci-dessous illustre le résultat dans le cas des rotations ($\varepsilon = 1$) : on représente un vecteur $x \in E$ ainsi que $u(x)$, et on note

$$z = (a | x) a \quad \text{et} \quad y = x - (a | x) a,$$

qui sont respectivement les projetés orthogonaux de x sur D et sur $F = D^\perp$.



Démonstration – Si $u \in \mathcal{O}(E)$, χ_u est un polynôme unitaire de degré 3, donc définit une fonction continue de limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, χ_u possède (au moins) une racine réelle, c'est-à-dire que u possède (au moins) une valeur propre réelle. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Par conservation de la norme, $\|u(x)\| = \|x\|$, c'est-à-dire, $|\lambda| \|x\| = \|x\|$. Le vecteur x est non nul, donc $|\lambda| = 1$, et $\lambda = \pm 1$.

Le polynôme caractéristique de u est scindé sur \mathbb{C} , de degré 3 et à coefficients réels, donc, s'il possède des racines complexes non réelles, elles sont au nombre de 2 et complexes conjuguées, on les notera α et $\bar{\alpha}$. On a alors $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 > 0$.

Cas $\varepsilon = 1$: Le déterminant de u , qui vaut 1, est le produit des racines complexes de χ_u , donc 1 doit être valeur propre de u (les différents triplets possibles de racines de χ_u sont, à l'ordre près, $(1,1,1)$, $(1, -1, -1)$, $(1, \alpha, \bar{\alpha})$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Soit a un vecteur propre unitaire de u associé à a valeur propre 1. On note $D = \text{Vect}(a)$ et $P = D^\perp$. Sachant que D est stable par u et que $u \in \mathcal{O}(E)$, on sait que P est stable par u . De plus, u conserve le produit scalaire sur E et donc par restriction, sur P . Ainsi, $u|_P$ est une isométrie vectorielle du plan P . De plus, dans toute base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, a)$ adaptée à la décomposition $E = P \oplus D$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{(e_1, e_2)}(u|_P) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$1 = \det(u) = \det(u|_P) \times 1,$$

ce qui entraîne finalement que $u|_P$ est une rotation de P .

On oriente P par le choix du vecteur normal a . D'après le paragraphe précédent, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormée directe de P , la matrice de $u|_P$ soit $R(\theta)$. La matrice

de u dans toute base orthonormée directe de E de dernier vecteur a est donc

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de u est alors

$$((X - \cos(\theta))^2 + \sin(\theta)^2)(X - 1) = (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)(X - 1).$$

Si $\cos(\theta) = 1$, $M = I_3$ et $u = \text{Id}$. Sinon, 1 est valeur propre simple de u et en particulier, $\text{Ker}(u - \text{Id})$ est une droite vectorielle. Dans ce cas, on a $D = \text{Ker}(u - \text{Id})$ (inclusion et même dimension) et la description annoncée.

De plus,

$$\text{Tr}(u) = \text{Tr}(M) = 2\cos(\theta) + 1,$$

et on démontre les autres formules en raisonnant en coordonnées dans une base orthonormée directe (e_1, e_2, a) de E : soit $x_0 = \alpha e_1 + \beta e_2$ un vecteur unitaire orthogonal à a ; les coordonnées de $u(x_0)$ dans la base (e_1, e_2, a) sont

$$M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) \\ \alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$(x_0 | u(x_0)) = \alpha(\alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta)) + \beta(\alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta)) = (\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta) = \cos(\theta)$$

car $\alpha^2 + \beta^2 = \|x_0\|^2 = 1$. De plus, la matrice colonne des coordonnées de $x_0 \wedge u(x_0)$ dans la base (e_1, e_2, a) est

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) \\ \alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

donc $x_0 \wedge u(x_0) = (\sin(\theta)) a$. Par définition, on a alors

$$[x_0, u(x_0), a] = (x_0 \wedge u(x_0) | a) = \sin(\theta) (a | a) = \sin(\theta).$$

Enfin, la formule

$$u(x) = \cos(\theta)[x - (a | x) a] + \sin(\theta) a \wedge x + (a | x) a$$

est vraie pour $x = e_1$, $x = e_2$ et $x = a$: par exemple,

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ &= \cos(\theta)[e_1 - (a | e_1) a] + \sin(\theta) a \wedge e_1 + (a | e_1) a \end{aligned}$$

car $(a | e_1) = 0$ et $a \wedge e_1 = e_2$; on procède de même pour $u(e_2)$ et $u(a)$. Sachant que (e_1, e_2, a) est une base de E et que les deux membres de l'égalité à démontrer définissent des applications linéaires, l'égalité est vraie pour tout $x \in E$.

Cas $\varepsilon = -1$: On raisonne de façon analogue en remplaçant la valeur propre 1 par -1 ; avec des notations semblables, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormée directe de E de dernier vecteur a , la matrice de u soit

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\cos(\theta) = -1$, $M = -I_3$ et $u = -\text{Id}$. Sinon, -1 est valeur propre simple de u , $\text{Ker}(u + \text{Id})$ est une droite vectorielle. \square

Remarques

- Dans le cas d'une rotation, changer l'orientation de l'axe revient à changer θ en $-\theta$.
- Si $u \in \mathcal{O}(E)$ vérifie $\det(u) = -1$ avec $u \neq -\text{Id}$, u est soit la réflexion par rapport à D^\perp (symétrie par rapport à D^\perp , parallèlement à D), soit la composée (commutative) d'une rotation d'axe D et d'une réflexion par rapport à D^\perp .

Exemple – L'espace \mathbb{R}^3 étant orienté et muni du produit scalaire canonique, soit

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (y,z,x) \end{cases}$$

La matrice de u dans la base canonique (qui est orthonormée) est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est orthogonale de déterminant 1, donc u est une rotation. Pour déterminer son axe D , on résout l'équation $u(x) = x$, ce qui équivaut à

$$x \in \text{Vect}(a), \quad \text{où } a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

On oriente D^\perp par le choix du vecteur normal a . Alors, si θ est une mesure de l'angle de u ,

$$0 = \text{Tr}(u) = 2 \cos(\theta) + 1,$$

donc $\cos(\theta) = -1/2$. Il reste à déterminer le signe de $\sin(\theta)$. Soit $x = (1, -1, 0) \in D^\perp$. Alors la matrice colonne des coordonnées de $x \wedge u(x)$ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dont le premier coefficient est -1 . Donc $x \wedge u(x)$, dont on sait qu'il est colinéaire à a , est de sens opposé à a . On en déduit que $\sin(\theta) < 0$, et donc, on peut choisir $\theta = 4\pi/3$ (ou $-2\pi/3$).