# Problème A : maximum d'une forme linéaire sur $O_n(\mathbb{R})$

## Résultats préliminaires

**1)** $f_n$ est une somme de "formes linéaires coordonnées" du type $M \mapsto m_{i,j}$ (qui sont linéaires par définition des opérations dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ !). Or l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et toute application linéaire définie sur espace de dimension finie est continue, donc

$$\boxed{f_n \text{ est une forme linéaire continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

**2) a)** Si $M$ est une matrice orthogonale, les vecteurs colonnes de $M$ sont tous unitaires pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et donc toutes leurs coordonnées sont majorées par 1 en valeur absolue. D'où, par définition de $\|M\|$ :

$$\boxed{\forall M \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|M\| \leq 1.}$$

**b)** $\varphi : M \mapsto {}^tMM - I_n$ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, polynomiale et donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car ce dernier est de dimension finie. Or $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par conséquent

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est un fermé de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

**3)** D'après les résultats du **2**, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée (et non vide car $I_n \in O_n(\mathbb{R})$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $f_n$ est continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur $O_n(\mathbb{R})$. En particulier,

$$\boxed{\text{Il existe } A_n \in O_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } f_n(A_n) = \max_{O_n(\mathbb{R})} f_n.}$$

## Partie I

**1)** Je vérifie que $(B_{n1}, \ldots, B_{nn})$ est une famille orthonormale (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

- les $B_{nk}$ pour $k \notin \{i,j\}$ sont unitaires (ce sont des vecteurs colonnes de $A_n$)
- $\|B_{ni}\|^2 = \cos^2 t.\|A_{ni}\|^2 - 2\cos t \sin t.(A_{ni}|A_{nj}) + \sin^2 t.\|A_{nj}\|^2 = 1$ car $A_{ni}$ et $A_{n,j}$ sont unitaires et orthogonaux, donc $B_{ni}$ est unitaire
- de même $B_{nj}$ est unitaire
- comme les $A_{nk}$ sont orthogonaux deux à deux, la seule orthogonalité non triviale pour les $B_{nk}$ est celle de $B_{ni}$ et $B_{nj}$, or par bilinéarité et symétrie du produit scalaire :

$$(B_{ni}|B_{nj}) = \cos t \sin t.\|A_{ni}\|^2 + \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right).(A_{ni}|A_{nj}) - \cos t \sin t.\|A_{nj}\|^2 = 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{La matrice } B_n \text{ appartient à } O_n(\mathbb{R}).}$$

**2)** Notons $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B_n = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Comme les $k$-ièmes colonnes de $A_n$ et $B_n$ sont identiques pour tout $k \notin \{i,j\}$, j'ai

$$\begin{aligned} f_n(A_n) - f_n(B_n) &= \sum_{\ell=1}^{i} (a_{\ell,i} - b_{\ell,i}) + \sum_{\ell=1}^{j} (a_{\ell,j} - b_{\ell,j}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{i} (a_{\ell,i} - \cos t.a_{\ell,i} + \sin t.a_{\ell,j}) + \sum_{\ell=1}^{j} (a_{\ell,j} - \sin t.a_{\ell,i} - \cos t.a_{\ell,j}) \end{aligned}$$

d'où, en regroupant les termes similaires,

$$\boxed{\begin{array}{l} f_n(A_n) - f_n(B_n) = \lambda(1 - \cos t) + \mu \sin t \text{ avec} \\ \lambda = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{i} a_{\ell,i} + \sum_{\ell=1}^{j} a_{\ell,j} \quad \text{et} \quad \mu = \sum_{\ell=1}^{i} a_{\ell,j} - \sum_{\ell=1}^{j} a_{\ell,i}. \end{array}}$$

**3)** Compte tenu des développements limités usuels, j'ai $\lambda(1 - \cos t) + \mu \sin t \underset{t \to 0}{=} \mu t + o(t)$. Par conséquent, si $\mu$ était non nul, l'expression ci-dessus changerait de signe en 0, ce qui contredirait la définition de $A_n$ (car, pour tout $t$, $f_n(B_n) \leq f_n(A_n)$ !). D'où, vu la valeur de $\mu$ au **2**,

$$\boxed{\mu = 0, \text{ c'est-à-dire } \sum_{\ell=1}^{i} a_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{j} a_{\ell,i}, \text{ cela pour tout } (i,j).}$$

## Partie II

**1) a)** Pour calculer $J_n^k$, j'introduis $\varphi = \text{Can}\, J_n$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $J_n$ dans la base canonique. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne ladite base canonique, $\varphi$ est défini par :

$$\varphi(e_j) = e_{j+1} \text{ si } 1 \leq j \leq n-1 \quad \text{et} \quad \varphi(e_n) = 0.$$

Une récurrence immédiate montre alors que, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\varphi^k(e_j) = e_{j+k} \text{ si } 1 \leq j \leq n-k \quad \text{et} \quad \varphi(e_j) = 0 \text{ si } n-k < j \leq n.$$

Et finalement $J_n^n = 0$ (matrice nilpotente classique...). Je constate alors que

$$\boxed{C_n = \sum_{k=0}^{n-1} J_n^k \text{ est bien un polynôme en } J_n.}$$

**b)** De plus, après développement, en constatant l'hécatombe, $(I_n - J_n)\, C_n = I_n - J_n^n = I_n$.
Comme $I_n - J_n$ et $C_n$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elles sont inversibles (leurs déterminants sont non nuls car de produit 1 !) et donc

$$\boxed{C_n^{-1} = I_n - J_n.}$$

**2) a)** Soit $M = (m_{i,j})$. Je calcule bêtement et j'applique la définition de $C_n$ :

$$\text{Tr}(C_n M) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} c_{j,i} m_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{j} m_{i,j} \right),$$

soit, par définition de $f_n$,

$$\boxed{\text{Pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_n(M) = \text{Tr}(C_n M).}$$

**b)** Là encore, calcul brut : $C_n A_n = (\gamma_{i,j})$ où, pour tout $(i,j)$

$$\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} a_{k,j} \ ;$$

je reconnais bien le $\sigma_{i,j}$ du **I-3)**, où l'on a justement montré que $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ !

$$\boxed{C_n A_n = (\sigma_{i,j}) \text{ et c'est une matrice symétrique.}}$$

**3) a)** J'ai $U_n = {}^t C_n^{-1} A_n$ et, $A_n$ étant orthogonale, j'ai ${}^t A_n = A_n^{-1}$ ; de plus je viens de voir que $C_n A_n$ est symétrique, d'où en utilisant abondamment le fait que l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse et les formules donnant la transposée d'un produit et l'inverse d'un produit :

$${}^t U_n = {}^t A_n C_n^{-1} = A_n^{-1} C_n^{-1} = (C_n A_n)^{-1} = {}^t(C_n A_n)^{-1} = \left({}^t C_n^{-1}\right)\left({}^t A_n^{-1}\right) = \left({}^t C_n^{-1}\right) A_n = U_n.$$

Ainsi

$$\boxed{U_n \text{ est une matrice symétrique.}}$$

**b)** J'ai $U_n^{-1} = A_n^{-1} \times {}^t C_n$ et, d'après le **2)a)** et les propriétés de la trace :

$$f_n(A_n) = \text{Tr}(C_n A_n) = \text{Tr}\left({}^t(C_n A_n)\right) = \text{Tr}\left({}^t A_n \times {}^t C_n\right)$$

soit, comme $A_n$ est orthogonale,

$$\boxed{f_n(A_n) = \text{Tr}\left(U_n^{-1}\right).}$$

**4)** D'après **3)a)**, j'ai

$$V_n = U_n^2 = U_n \times {}^t U_n = \left({}^t C_n^{-1} A_n\right)\left({}^t A_n C_n^{-1}\right) = \left({}^t C_n^{-1}\right) C_n^{-1}$$

car $A_n$ est orthogonale. Or j'ai vu au **1)b)** que $C_n^{-1} = I_n - J_n$, d'où

$$V_n = \left(I_n - {}^t J_n\right)(I_n - J_n) = I_n - {}^t J_n - J_n + {}^t J_n J_n.$$

Or (effectuer le produit matriciel ou observer les images des vecteurs de la base canonique !)

$${}^t J_n J_n = \text{diag}(1, \ldots, 1, 0).$$

Il en résulte que

$$\boxed{V_n \text{ est la matrice décrite dans l'énoncé.}}$$

## Partie III

**1)** Soit $n \geq 2$. J'obtiens classiquement, en développant par rapport à la première ligne,

$$P_n(x) = (x-2)\,P_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

où ce dernier déterminant est d'ordre $n-1$ et se développe par rapport à la première colonne pour donner

$$\boxed{P_n(x) = (x-2)\,P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).}$$

**2)** Ici $x = 4\sin^2\theta$. Comme $\theta \in [0, \pi/2[$, j'ai $\cos\theta > 0$ et $x - 2 = 2\left(2\sin^2\theta - 1\right) = -2\cos 2\theta$. Je raisonne par récurrence double sur $n$ :

- $P_0(x) = 1 = \dfrac{\cos(2\times 0+1)\,\theta}{\cos\theta}$ et $P_1(x) = x - 1 = 3 - 4\cos^2\theta = -\dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$ ; en effet
$$\cos 3\theta = \mathrm{Re}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$
- Je suppose $n \geq 2$ tel que
$$P_{n-2}(x) = (-1)^{n-2}\cdot\frac{\cos(2n-3)\,\theta}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad P_{n-1}(x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{\cos(2n-1)\,\theta}{\cos\theta}.$$
- Alors d'après **1)**
$$(-1)^n P_n(x) = 2\cos 2\theta\cdot\frac{\cos(2n-1)\,\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos(2n-3)\,\theta}{\cos\theta}$$
or
$$2\cos 2\theta\cos(2n-1)\,\theta = \cos(2n+1)\,\theta + \cos(2n-3)\,\theta$$
d'où
$$P_n(x) = (-1)^n\cdot\frac{\cos(2n+1)\,\theta}{\cos\theta}$$
ce qui achève cette preuve par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(x) = (-1)^n\cdot\frac{\cos(2n+1)\,\theta}{\cos\theta}.}$$

**3)** Notons $\theta_k = \dfrac{2k+1}{2n+1}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ et $x_k = 4\sin^2\theta_k$. Les $\theta_k$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc, d'après le résultat précédent, les $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont des racines de $P_n$ puisque $\cos(2k+1)\,\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Or $0 < \theta_0 < \cdots < \theta_{n-1} < \dfrac{\pi}{2}$ et la fonction $\theta \mapsto 4\sin^2\theta$ est strictement croissante donc injective sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont $n$ racines distinctes de $P_n$, qui est de degré $n$. En conclusion,

$$\boxed{\text{Les racines de } P_n \text{ sont les } x_k,\ k \in [\![0, n-1]\!].}$$

Or nous avons vu au **II** que $U_n$ était symétrique réelle, donc diagonalisable en vertu du théorème spectral : je dispose donc d'une matrice orthogonale $P$ et d'une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que

$$U_n = P\Delta P^{-1} \quad \text{d'où} \quad V_n = U_n^2 = P\Delta^2P^{-1} \quad \text{et} \quad U_n^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1}$$

($U_n$ est inversible par définition, car $C_n^{-1}$ l'est et $A_n$ aussi puisqu'elle est orthogonale).

Donc un système de valeurs propres de $V_n$ est $\left(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2\right)$. Or nous venons de voir que les valeurs propres de $V_n$ sont les $x_k$. Par conséquent, les $|\lambda_j|$ sont, à l'ordre près, les $\sqrt{x_k} = 2\sin\theta_k \in\, ]0, 2[$ et

$$\boxed{\text{Les valeurs absolues des valeurs propres de } U_n^{-1} \text{ sont les } \frac{1}{2\sin\theta_k}.}$$

**4) a)** Je viens de voir que l'on peut écrire

$$\boxed{U_n^{-1} = PDP^{-1} \text{ avec } P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } D = \mathrm{diag}\,(d_k) \quad \text{où} \quad |d_k| = \frac{1}{2\sin\theta_k}.}$$

**b)** On suppose que certains des $d_k$ sont négatifs et l'on pose
$$A' = C_n^{-1} P D' P^{-1}.$$

**(i)** Comme deux matrices semblables ont même trace, j'ai grâce au **3)b)**
$$\mathrm{Tr}\left(C_n A'\right) = \mathrm{Tr}\left(P D' P^{-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} |d_k| \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\left(C_n A_n\right) = f_n\left(A_n\right) = \mathrm{Tr}\left(U_n^{-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} d_k.$$
Or les $d_k$ sont non nuls, donc certains sont strictement négatifs par hypothèse, d'où
$$\boxed{\mathrm{Tr}\left(C_n A'\right) > \mathrm{Tr}\left(C_n A_n\right).}$$

**(ii)** Comme $P$ est orthogonale et $D'$ diagonale, j'ai
$${}^t A' = P D' P^{-1}\left({}^t C_n^{-1}\right)$$
d'où, comme $D'^2 = D^2$,
$$A' \times {}^t A' = C_n^{-1} P D'^2 P^{-1}\left({}^t C_n^{-1}\right) = C_n^{-1} U_n^{-1} U_n^{-1}\left({}^t C_n^{-1}\right) = A_n \times {}^t A_n$$
car d'après **3)a)** $U_n$ est symétrique, d'où
$$U_n = {}^t U_n = A_n^{-1} C_n^{-1} \quad \text{donc} \quad U_n^{-1} = C_n A_n \quad \text{et} \quad C_n^{-1} U_n^{-1} = A_n.$$
Or $A_n$ est orthogonale donc $A' \times {}^t A' = I_n$, c'est-à-dire que
$$\boxed{A' \in O_n\left(\mathbb{R}\right).}$$

**(iii)** Les deux résultats précédents contredisent la définition de $A_n$, puisque $\mathrm{Tr}\left(C_n A_n\right) = f_n\left(A_n\right)$ est le maximum de $f_n$ sur $O_n\left(\mathbb{R}\right)$. En conclusion,
$$\boxed{\text{Tous les } d_k \text{ sont positifs.}}$$

**5)** Nous venons de voir que les $d_k$ sont les $\dfrac{1}{2\sin\theta_k}$ et que $f_n\left(A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} d_k$, d'où
$$\boxed{f_n\left(A_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{2k+1}{2n+1}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}.}$$

## Partie IV

**1)** La fonction $\phi : t \mapsto \dfrac{1}{\sin t}$ est décroissante sur $]0, \pi/2]$ donc
$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \forall t \in \left[(2k-1)h, (2k+1)h\right] \quad \phi\big((2k+1)h\big) \leq \phi(t) \leq \phi\big((2k-1)h\big)$$
D'où, par croissance de l'intégrale, l'intervalle étant d'amplitude $2h$,
$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad 2h\phi\big((2k+1)h\big) \leq \int_{(2k-1)h}^{(2k+1)h} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leq 2h\phi\big((2k-1)h\big)$$
d'où en sommant le côté droit pour $k = 1, \ldots, n$ et grâce à la relation de Chasles :
$$\int_{h}^{(2n+1)h} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leq 2h\sum_{k=1}^{n} \phi\big((2k-1)h\big) = 4h f_n\left(A_n\right)$$
en réindexant. Puis, en sommant de même le côté gauche pour $k = 1, \ldots, n-1$ :
$$2h\sum_{k=1}^{n-1} \phi\big((2k+1)h\big) \leq \int_{h}^{(2n-1)h} \phi(t)\,\mathrm{d}t$$
d'où en ajoutant $2h\phi(h)$ pour retrouver le terme pour $k = 0$ dans la somme
$$\boxed{\int_{h}^{(2n+1)h} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leq 4h f_n\left(A_n\right) \leq 2h\phi(h) + \int_{h}^{(2n-1)h} \phi(t)\,\mathrm{d}t.}$$

**2)** La première idée est le calcul brut de l'intégrale (cf. ci-dessous). Je préfère retrouver un résultat classique sur l'intégration d'équivalents, puisqu'ici la comparaison est aisée. En posant $\psi(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ si $t \in ]0, \pi/2]$, j'ai pour $h \in ]0, \pi/2]$
$$\psi(t) = \frac{t - \sin t}{t\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{6} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc la fonction $\psi$ se prolonge par continuité en 0 et $\displaystyle\int_h^{\pi/2} \psi(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $h$ tend vers 0 (à savoir $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \psi(t)\,\mathrm{d}t$ !). Il reste à écrire

$$\int_h^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \int_h^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_h^{\pi/2} \psi(t)\,\mathrm{d}t = -\ln h + \ln\frac{\pi}{2} + \int_h^{\pi/2} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

où $-\ln h$ tend vers $+\infty$ tandis que les deux termes suivants sont bornés. En conclusion

$$\boxed{\int_h^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} \underset{h\to 0}{\sim} -\ln h.}$$

**N.B.** : rappelons que l'on connaît les primitives de $t \mapsto \dfrac{1}{\sin t}\ldots$

$$\int_h^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \int_h^{\pi/2} \frac{\sin t\mathrm{d}t}{1-\cos^2 t} = \int_0^{\cos h} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos h}{1-\cos h}$$

**3)** Rappelons-nous que le $h$ de l'énoncé dépend de $n\ldots$ Je préfère noter $h_n = \dfrac{\pi}{2(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4n}$ et j'ai

$$\int_{h_n}^{(2n+1)h_n} \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{h_n}^{\pi/2} \phi(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\sim} -\ln h_n \quad \text{car} \quad h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or $0 \neq 1$ donc $-\ln h_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln\dfrac{4n}{\pi} = \ln n + \ln\dfrac{4}{\pi} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$. Côté majorant, $2h_n\phi(h_n) = \dfrac{2h_n}{\sin h_n}$ est borné et

$$\int_h^{(2n-1)h} \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{h_n}^{\pi/2} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{(2n-1)h_n}^{\pi/2} \phi(t)\,\mathrm{d}t$$

et cette dernière intégrale tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, car $(2n-1)h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi/2$ ; elle est donc négligeable devant la précédente, qui tend vers $+\infty$. Et pour la même raison

$$2h_n\phi(h_n) + \int_h^{(2n-1)h} \phi(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n.$$

Le théorème d'encadrement donne alors, grâce au **1)**

$$\frac{4h_n f_n(A_n)}{\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

autrement dit

$$\boxed{f_n(A_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} n\ln n.}$$

## Problème B

### Partie I – Étude des variations de $F$

**1)** Pour tout réel $u$, la fonction $f_u : x \mapsto x^{-u}\sqrt{1+x}$ est continue sur $]0,1]$, à valeurs positives. De plus,

$$f_u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^u}.$$

Par conséquent, d'après les résultats sur les intégrales de Riemann, $f_u$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $u < 1$, donc l'ensemble de définition de $F$ est bien $\Delta = ]-\infty, 1[$.

Par ailleurs, si $u, v$ sont deux éléments de $\Delta$ tels que $u < v$, j'ai

$$\forall x \in ]0,1] \quad \ln x \leq 0 \quad \text{d'où} \quad -u\ln x \leq -v\ln x \quad \text{et donc} \quad f_u(x) \leq f_v(x),$$

d'où $F(u) \leq F(v)$ par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{F \text{ est définie et croissante sur } \Delta.}$$

**2)** J'applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ : pour pouvoir dominer, je fixe $a < 1$ et je montre que $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, a]$.

Soit $f : (u,x) \mapsto x^{-u}\sqrt{1+x}$.

- Pour tout $x$ de $]0,1]$, la fonction $u \mapsto f(u,x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,a]$ (théorèmes opératoires classiques).
- Pour tout $u$ de $]-\infty,a]$, la fonction $x \mapsto f(u,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ (déjà vu).
- Pour tout $u$ de $]-\infty,a]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,x) = -\ln x \cdot x^{-u}\sqrt{1+x}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$ (théorèmes opératoires classiques).
- *Domination* : soit $(u,x) \in ]-\infty,a] \times ]0,1]$ ; comme $\ln x \leq 0$ et $u \leq a$, j'ai
$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq \psi(x) \quad \text{où} \quad \psi(x) = -\ln x \cdot x^{-a}\sqrt{2}$$
et $\psi$ est indépendante de $u$ et intégrable sur $]0,1]$ (c'est une intégrale de Bertrand : choisir $b$ tel que $a < b < 1$ et remarquer que
$$\frac{-\ln x}{x^a} = \left(-\ln x \cdot x^{b-a}\right)\frac{1}{x^b} \underset{x\to 0}{=} O\left(\frac{1}{x^b}\right)$$
du fait des croissances comparées, tandis que $x \mapsto \dfrac{1}{x^b}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $b<1$ (Riemann).

Donc le théorème s'applique : $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,a]$, cela pour tout $a<1$, d'où finalement
$$\boxed{F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Delta.}$$
La formule de Leibniz donne bien sûr une expression de $F'(x)$, mais l'énoncé nous dissuade d'essayer de l'exploiter. Autre remarque : on montrerait de même que $F$ est $\mathcal{C}^\infty$, mais cela ne suffit pas pour obtenir un développement en série entière (cf. le **II**).

**3) a)** Pour tout $X$ plus grand que 1, j'ai $1 \leq X \leq X^2$, d'où, en appliquant ceci avec $X = \sqrt{1+x}$ :
$$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad 1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1+x.}$$
En multipliant par $x^{-u}$, pour $u<1$, puis en intégrant entre 0 et 1 (toutes les intégrales convergent), j'obtiens
$$\int_0^1 x^{-u}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f_u(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \left(x^{-u} + x^{1-u}\right)\mathrm{d}x,$$
soit, en calculant les intégrales de gauche et de droite à l'aide de primitives :
$$\boxed{\frac{1}{1-u} \leq F(u) \leq \frac{1}{1-u} + \frac{1}{2-u} \text{ cela pour tout } u \text{ de } \Delta.}$$

**b)** Il en résulte que $F$ a pour limite $+\infty$ à gauche en 1 et — plus précisément — grâce au théorème d'encadrement, que $(1-u)F(u)$ a pour limite 1, d'où
$$\boxed{\lim_{u\to 1^-} F(u) = +\infty \text{ et } F(u) \underset{u\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-u}.}$$

**4) a)** D'après l'encadrement obtenu au **3)a)** et grâce au théorème d'encadrement,
$$\boxed{\lim_{u\to -\infty} F(u) = 0.}$$

**b)** Soit $u<1$ ; le produit $x \mapsto \frac{x^{1-u}}{1-u} \cdot \sqrt{1+x}$ ayant une limite finie en 0 (à savoir 0, car $1-u>0$), j'obtiens en intégrant par parties :
$$\int_0^1 x^{-u}\sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-u}}{1-u} \cdot \sqrt{1+x}\right]_{x\to 0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{1-u}}{1-u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$$
La dernière intégrale converge nécessairement puisque la première converge (en l'occurrence c'est évident car $1-u>0$). Autrement dit,
$$\boxed{\forall u<1 \quad F(u) = \frac{\sqrt{2}}{1-u} - \frac{1}{2(1-u)} \cdot G(u).}$$

**c)** J'ai

$$\forall x \in [0,1] \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1,$$

d'où, puisque $\displaystyle\int_0^1 x^{1-u}\mathrm{d}x = \frac{1}{2-u}$,

$$\boxed{\forall u < 1 \quad G(u) \leq \frac{1}{2-u} \quad \text{et donc} \lim_{u\to-\infty} G(u) = 0.}$$

Par conséquent,

$$-\frac{1}{2(1-u)}G(u) \underset{u\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{1-u}\right) \quad , \quad \text{d'où} \quad F(u) \underset{-\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{1-u},$$

soit finalement

$$\boxed{F(u) \underset{-\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{-u}.}$$

**5)** Soit $u < 0$ ; le produit $x \mapsto x^{-u} \cdot \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$ ayant une limite finie en 0 (à savoir 0, car $u < 0$), donc là encore je peux intégrer par parties :

$$\int_0^1 x^{-u}\sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \left[x^{-u} \cdot \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_{x\to 0}^{x=1} + \frac{2u}{3}\int_0^1 x^{-u-1}(1+x)^{3/2}\mathrm{d}x,$$

or

$$(1+x)^{3/2} = \sqrt{1+x} + x\sqrt{1+x},$$

d'où,

$$\boxed{\forall u < 0 \quad 2uF(u+1) + (2u-3)F(u) + 4\sqrt{2} = 0.}$$

J'ai

$$F(0) = \int_0^1 \sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

J'en déduis $F(-1)$ en appliquant la relation précédente pour $u = -1$ :

$$\boxed{F(0) = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \text{ et } F(-1) = \frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right).}$$

**6)** J'ai montré que $F$ est croissante sur $\Delta$, que sa courbe représentative admet pour asymptotes les droites d'équation $x = 1$ et $y = 0$ ; j'ajoute à ces renseignements les valeurs approchées $F(0) \approx 1.22$ et de $F(-1) \approx 0.64$. L'allure du graphe en résulte. On peut préciser les tangentes en ces deux points en calculant grâce au **2)**

$$F'(0) = \int_0^1 -\ln x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - \ln 2 \approx 0.807$$

et

$$F'(-1) = \int_0^1 -x\ln x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{8} = 0.125$$

## Partie II – Développement en série entière de $F$

**1)** Fixons $n \in \mathbb{N}$. J'ai $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^n = 0$, donc $v_n$ est continues sur $[0,1]$ ; en outre, comme $1 + x \geq 1$ :

$$\forall x \in \left]0,1\right] \quad |v_n(x)| \leq \frac{|u|^n}{n!} \cdot x(-\ln x)^n.$$

Or $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x(-\ln x)^n\right] = (-\ln x)^{n-1}(-\ln x - n)$, donc la fonction $x \mapsto x(-\ln x)^n$ atteint son maximum en $e^{-n}$, d'où

$$\sup_{[0,1]}|v_n| \leq \delta_n \quad \text{où} \quad \delta_n = \frac{|u|^n}{n!} \cdot e^{-n}n^n.$$

D'après la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, donc $\delta_n \sim \dfrac{|u|^n}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to\infty}{=} O(|u|^n)$. Comme $|u| < 1$, la série géométrique $\sum |u|^n$ converge et donc la série $\sum \delta_n$ converge également. Il en résulte que

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum v_n \text{ converge normalement sur } [0,1].}$$

*A fortiori*, elle converge uniformément sur $[0,1]$ ; il en résulte (théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment) que la série numérique de terme général $\int_0^1 v_n$ converge, avec :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 v_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, par définition de la série exponentielle, j'ai

$$\forall x \in \left]0,1\right] \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} e^{-u\ln x} = \frac{x^{1-u}}{\sqrt{1+x}}.$$

Par ailleurs, par définition des $b_n$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 v_n(x)\,\mathrm{d}x = b_n u^n.$$

En conclusion :

$$\boxed{G(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n.}$$

**2)** J'ai par ailleurs, pour $u \in \left]-1,1\right[$ :

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \;, \quad \text{d'où} \quad F(u) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u^n - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n\right),$$

cela en reprenant les résultats de la question précédente et du **I-4)b).** Ces deux dernières séries étant absolument convergentes, je peux développer le produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u^j\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k u^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) u^n.$$

Il vient finalement

$$\boxed{F(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \text{ avec : } \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} b_k.}$$