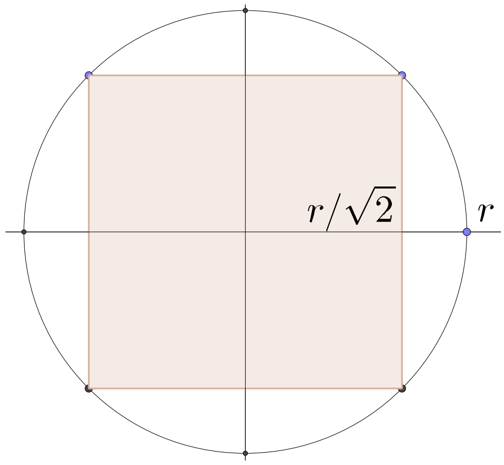
I. Résultats préliminaires

I.A.1a Ω étant ouvert, il existe une boule (pour la norme euclidienne choisie dans l'énoncé) centrée en (x, y) de rayon r incluse dans Ω. J'ai alors

$$I \times J = \left]x - r/\sqrt{2}, x + r/\sqrt{2}\right[\times \left]y - r/\sqrt{2}, y + r/\sqrt{2}\right[\subset \Omega$$

En effet, si $(u, v) \in I \times J$ alors $|x - u| < r/\sqrt{2}$ et $|y - v| < r/\sqrt{2}$ et donc $(x - u)^2 + (y - v)^2 < r^2$ ce qui montre que $I \times J \subset D\big((x, y), r\big) \subset \Omega$.
Remarque : je peux illustrer cela en remarquant que je peux inclure un carré dans un disque. J'aurais aussi pu dire directement que Ω est un ouvert pour la norme N_∞, puisque la notion d'ouvert ne dépend pas du choix de la norme...



I.A.1b P étant un polynôme de deux variables, je peux l'écrire (pour n convenable)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{n-k} \alpha_{k,l} y^l\right) x^k = \sum_{k=0}^{n} Q_k(y) x^k \quad \text{avec} \quad \forall k,\ Q_k \in \mathbb{R}[X]$$

D'après ce qui précède, pour $y \in J$ fixé, $x \mapsto P(x, y)$ s'annule sur I. Comme c'est une fonction polynomiale et que I est infini, c'est la fonction polynomiale nulle. Ainsi (un polynôme d'une variable est nul si et seulement si tous ses coefficients le sont)

$$\forall k \in [0, d],\ \forall y \in J \quad Q_k(y) = 0$$

De la même façon, Q_k est le polynôme nul et tous les coefficients $\alpha_{k,l}$ le sont. Donc

$$\boxed{P \text{ est donc le polynôme nul.}}$$

I.A.2 $P : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ est nul sur le cercle unité, qui possède une infinité d'éléments, mais n'est pas le polynôme nul. Le résultat précédent ne subsiste pas avec la seule hypothèse "Ω infini".

I.B.1 Par définition, $\mathcal{P}_m$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $\big(f_{k,l} : (x, y) \mapsto x^k y^l\big)_{\substack{k,l \in \mathbb{N} \\ k+l \leq m}}$. C'est donc bien un espace vectoriel ! La famille génératice trouvée est libre (puisqu'un polynôme n'est nul que si tous ses coefficients le sont). Elle forme une base de $\mathcal{P}_m$ et la dimension de l'espace est donc (pour chaque valeur de $k \in [0, m]$, j'ai $m - k + 1$ choix possibles pour l)

$$\dim \mathcal{P}_m = \sum_{k=0}^{m} (m - k + 1) = \sum_{j=1}^{m+1} j = \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}$$

I.B.2 Posons $P_1 : (x, y) \mapsto x + y$. J'ai alors immédiatement $\Delta(P_1) = 0$. Il est en fait clair que tout polynôme de degré 1 est harmonique.
Posons $P_2 : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$. J'ai alors $\partial_{1,1} P_2(x, y) = 2$ et $\partial_{2,2} P_2(x, y) = -2$ ce qui montre que P_2 est harmonique.

I.B.3a $P \mapsto \Delta P$ est une application linéaire (linéarité de la dérivation partielle) et l'ensemble des polynômes harmoniques est l'espace vectoriel (une intersection de sous-espaces est un sous-espace)

$$\operatorname{Ker} \Delta \cap \mathcal{P}$$

I.B.3b D'après le théorème du rang,

$$\frac{(m + 1)(m + 2)}{2} = \dim \mathcal{P}_m = \dim \operatorname{Ker} \Delta_m + \dim \operatorname{Im} \Delta_m$$

Or, de façon immédiate j'ai dim $\operatorname{Im}\Delta_m \subset \mathcal{P}_{m-2}$ (quand on dérive partiellement deux fois, on perd au moins deux degrés). Ainsi, $\dim\operatorname{Im}\Delta_m \le \dfrac{(m-1)m}{2}$ et donc

$$\dim\operatorname{Ker}\Delta_m \ge \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = 2m+1$$

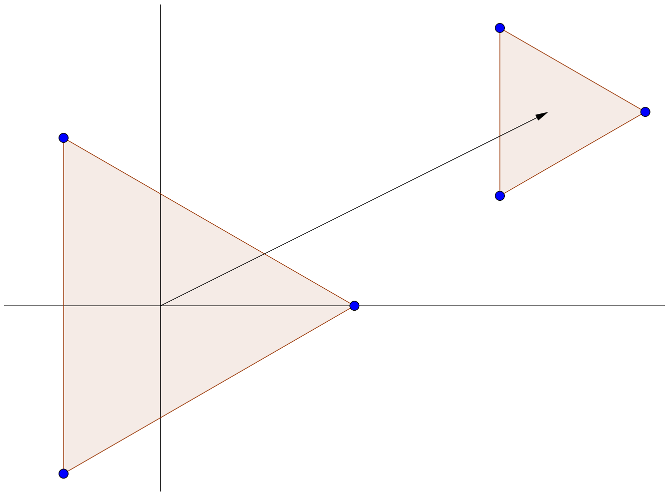
I.B.3c Comme pour tout m j'ai $\operatorname{Ker}\Delta_m \subset \operatorname{Ker}\Delta$, je peux en déduire que l'espace vectoriel des polynômes harmoniques est de dimension infinie.

I.C.1 Posons $H(x,y) = xy$. H est un polynôme harmonique qui est partout égal à $f : (x,y) \mapsto xy$.

I.C.2 Reprenons l'exemple du **I.B.2** : $H : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est un polynôme harmonique ; or pour $(x,y) \in C(0,1)$, j'ai $f(x,y) = x^4 - y^4 = \left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right) = H(x,y)$ puisque $x^2+y^2 = 1$. Donc H convient.

II. Quelques exemples d'applications harmoniques

II.A $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est l'image de Ω par l'homothétie de centre O de rapport λ, composée avec la translation de vecteur (x_0,y_0). Dans le cas proposé, j'obtiens le dessin suivant.



II.B.1 Comme $\partial_i f$ est de classe $\mathcal{C}^2$, je peux lui appliquer le théorème de Schwarz qui indique que je peux permuter les dérivées partielles. J'ai ainsi par linéarité $\Delta(\partial_i f) = \partial_i(\Delta f)$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Quand } f \text{ est harmonique, } \partial_1 f \text{ et } \partial_2 f \text{ le sont aussi.}}$$

II.B.2 Comme il a été indiqué plus haut,

$$\Omega_{x_0,y_0,\lambda} = \left(T_{(x_0,y_0)} \circ H_\lambda\right)(\Omega)$$

où T_u est la translation de vecteur u et $H_\lambda = \lambda.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ est l'homothétie de centre O de rapport λ. Noter que ces deux applications sont des bijections et que

$$\Omega = \left(H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0,y_0)}\right)(\Omega_{x_0,y_0,\lambda})$$

Soit $(x,y) \in \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$; posons $(x',y') = H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0,y_0)}(x,y)$. C'est un élément de Ω et il existe donc $r > 0$ tel que $D\left((x',y'),r\right) \subset \Omega$. J'ai alors

$$D\left((x,y),|\lambda|r\right) = \left(T_{(x_0,y_0)} \circ H_\lambda\right)\left(D\left((x',y'),r\right)\right) \subset T_{(x_0,y_0)} \circ H_\lambda(\Omega) = \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$$

Cela montre que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est un ouvert.
J'aurais aussi pu conclure en remarquant que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est l'image réciproque de Ω par l'application continue $H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0,y_0)}$.

II.B.3 Posons $h(x,y) = g\left(\lambda(x,y) + (x_0,y_0)\right)$. J'ai alors (quand g est de classe $\mathcal{C}^2$, h l'est aussi par théorèmes opératoires classiques)

$$\partial_{i,i}h(x,y) = \lambda^2\partial_{i,i}g(\lambda(x,y) + (x_0,y_0))$$

et le caractère harmonique de g entraîne immédiatement celui de h.

II.C.1 h_1 et h_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par théorèmes opératoires classiques. De plus

$$\partial_1 h_1(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \ ; \quad \partial_{1,1} h_1(x,y) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_2 h_1(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} \ ; \quad \partial_{2,2} h_1(x,y) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

et j'ai donc $\Delta(h_1)=0$, c'est-à-dire h_1 harmonique. En remarquant que $h_2 = \dfrac{1}{2}\partial_1 h_1$, j'en déduis avec les questions précédentes que h_2 est aussi harmonique.

II.C.2 Notons φ_t l'application proposée. En développant le numérateur, j'obtiens pour $(x,y)\neq(0,0)$

$$\varphi_t\,(x,y) = \frac{-x^2-y^2-2x\cos t-2y\sin t}{x^2+y^2}.$$

J'ai donc

$$\varphi_t = -1-\cos t\cdot\partial_1 h_1 - \sin t\cdot\partial_2 h_1$$

qui est harmonique comme combinaison linéaire de fonctions harmoniques.

II.D.1 Je remarque que (en utilisant les notations introduites en question précédente)

$$N_t(x,y) = \varphi_t(x-\cos t, y-\sin t)$$

Nous sommes dans le cas de la question **II.B.3** avec $\lambda=1$, $(x_0,y_0)=(-\cos t,-\sin t)$ et $g=\varphi_t$. Cette question indique que N_t est harmonique sur l'image de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par $(x,y)\mapsto(x+\cos t, y+\sin t)$ c'est-à-dire sur $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(\cos t,\sin t)\}$. $D(0,1)$ étant inclus dans Ω,

$$\boxed{N_t \text{ est harmonique sur } D(0,1).}$$

II.D.2 Par théorèmes opératoires classiques, $t\mapsto N(x,y,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Les seuls t qui peuvent poser problème sont ceux tels que $(x,y)=(\cos t,\sin t)$ et il n'y en a pas puisque $(x,y)\in D(0,1)$. $t\mapsto N(x,y,t)$ est donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier elle est continue sur $[0,2\pi]$.

II.D.3 Je réduis au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
-1+\frac{\alpha}{1-ze^{-it}}+\frac{\beta}{1-\bar{z}e^{it}} &= \frac{-(1-ze^{-it})(1-\bar{z}e^{it})+\alpha\left(1-\bar{z}e^{it}\right)+\beta\left(1-ze^{-it}\right)}{(1-ze^{-it})(1-\bar{z}e^{it})}\\
&= \frac{\alpha+\beta-1-z\bar{z}+(1-\beta)\,ze^{-it}+(1-\alpha)\,\bar{z}e^{it}}{|z-e^{it}|^2}
\end{aligned}$$

et il apparaît que le choix $\alpha=\beta=1$ convient !

$$\boxed{N\,(x,y,t) = -1+\frac{1}{1-ze^{-it}}+\frac{1}{1-\bar{z}e^{it}}.}$$

II.D.4 En utilisant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-u}$ (valable sur $]-1,1[$) et comme $\left|ze^{-it}\right| = |z| < 1$, j'ai

$$\forall t\in[0,2\pi] \quad \frac{1}{1-ze^{-it}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-ikt}$$

Soit $f_k : t\mapsto z^k e^{-ikt}$. (f_k) est une suite de fonctions continues sur $[0,2\pi]$ et $\max\limits_{[0,2\pi]}|f_k| = |z|^k$ est le terme général d'une série convergente (géométrique de raison $|z|<1$). $\sum f_k$ est converge normalement donc uniformément sur le **segment** $[0,2\pi]$. Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment s'applique : je peux écrire

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-ze^{-it}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\mathrm{d}t = 2\pi$$

toutes les intégrales étant nulles sauf celle pour $k=0$. En conjuguant, j'ai aussi

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-\bar{z}e^{it}} = 2\pi$$

Avec la question précédente, j'ai alors

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t)\mathrm{d}t = 1.}$$

III. Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

III.A.1a Il s'agit d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe $\int$. Ici, y est fixé dans $]-1,1[$ et je pose $g(x,t) = N(x,y,t)f(\cos t, \sin t)$ pour $t \in [0,2\pi]$ et

$$x \in I_y = \left\{x \ / \ x^2+y^2<1\right\} = \left]-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\right[.$$

Pour la domination, je fixe un segment $[a,b]$ inclus dans I_y.

- Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur le segment $[0,2\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
- Pour tout $t \in [0,2\pi]$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I_y et ses dérivées sont $x \mapsto f(\cos t, \sin t)\partial_1 N_t(x,y)$ et $x \mapsto f(\cos t, \sin t)\partial_{1,1} N_t(x,y)$.
- Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto f(\cos t, \sin t)\partial_1 N_t(x,y)$ et $t \mapsto f(\cos t, \sin t)\partial_{1,1} N_t(x,y)$ sont continues sur $[0,2\pi]$ donc intégrables sur ce segment.
- <u>*Domination*</u> : les applications $(x,t) \mapsto \partial_1 N_t(x,y)f(\cos t, \sin t)$ et $(x,t) \mapsto \partial_{1,1} N_t(x,y)f(\cos t, \sin t)$ sont continues sur la partie fermée bornée $[a,b] \times [0,2\pi]$ de $\mathbb{R}^2$. Je peux donc les majorer sur cette partie par des constantes. Ces majorants sont indépendants de x et intégrables sur $[0,2\pi]$ (une fonction constante est intégrable sur un segment !).

Ainsi le théorème s'applique : N_f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable, cela en tout point de $D(0,1)$, qui peut s'écrire (x,y) avec $x \in [a,b]$ comme ci-dessus, a et b étant choisis en fonction de y et de x. Ces dérivées s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale. Suivant l'énoncé nous admettons que pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$:

$$\boxed{\partial_{i,j} N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_{i,j} N_t(x,y) f(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t.}$$

III.A.1b Le caractère harmonique de N_t et la linéarité de l'intégrale donnent le caractère harmonique de N_f sur $D(0,1)$. Or N_f n'est autre que la restriction de u à $D(0,1)$:

$$\boxed{u \text{ est harmonique sur } D(0,1).}$$

III.A.2a Notons $M(t) = (\cos t, \sin t)$ le point “courant” du cercle unité $C(0,1)$. Pour visualiser la situation, on considère le point $M(t_0)$ et l'on s'intéresse aux $t \in [0,2\pi]$ tels que $M(t)$ appartienne à la boule $\bar{D}(M(t_0),\delta)$. Si $\delta \geq 2$, n'importe quel t convient ! Si $\delta < 2$, le cercle de centre $M(t_0)$ et de rayon δ recoupe le cercle unité en deux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$. Les solutions correspondent aux points de l'arc du cercle unité délimité par ces deux points et contenant $M(t_0)$. La discussion tient alors au fait que le point $I = (1,0)$ appartient ou pas à cet arc, car on veut t dans $[0,2\pi]$.
Pour démontrer cela par le calcul, en mettant en facteur $e^{i(t+t_0)/2}$, j'obtiens

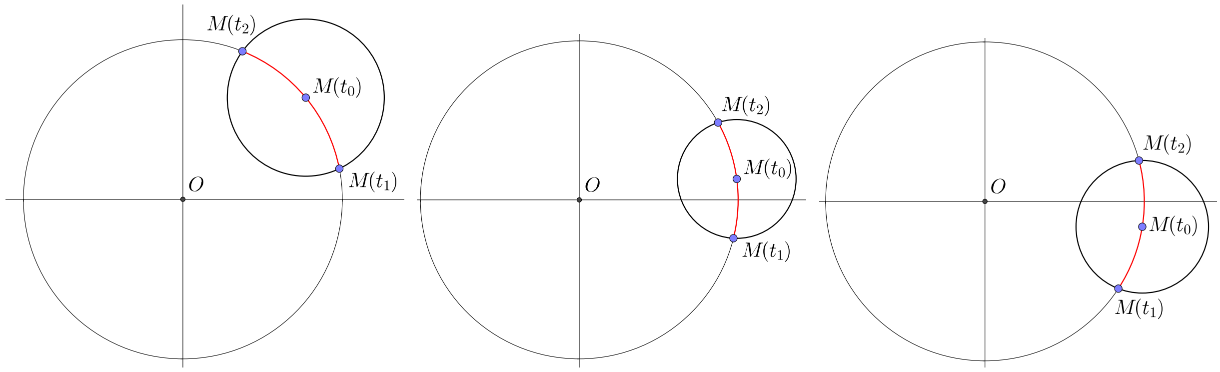
$$\|M(t) - M(t_0)\| \leq \delta \Leftrightarrow \left|e^{it} - e^{it_0}\right| \leq \delta \Leftrightarrow \left|\sin\left(\frac{t-t_0}{2}\right)\right| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Je retrouve ainsi le cas $\delta \geq 2$, où tout t convient et donc $I_0^\delta = [0,2\pi]$.
Si $\delta \in]0,2[$, je pose $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{\delta}{2}\right)$ ($\alpha \in]0,\pi/2[$). Soient alors $t_1 = t_0 - 2\alpha$ et $t_2 = t_0 + 2\alpha$. J'ai

$$t_0 - \pi \leq t_1 < t_0 < t_2 \leq t_0 + \pi.$$

Les t de $[t_0 - \pi, t_0 + \pi]$ (ce qui suffit modulo 2π pour obtenir n'importe quel point du cercle unité) convenables sont par construction ceux de $[t_1,t_2]$; or nous voulons $t \in [0,2\pi]$, donc trois cas se présentent (car $t_2 - t_1 < 2\pi$) :

- si $[t_1,t_2] \subset [0,2\pi]$, alors $I_0^\delta = [t_1,t_2]$ est un intervalle ;
- si $t_1 < 0$, alors $t_2 \in [0,2\pi]$ et $I_0^\delta = [0,t_2] \cup [t_1+2\pi, 2\pi]$ est l'union de deux intervalles disjoints ;
- si $t_2 > 2\pi$, de même $I_0^\delta = [0, t_2 - 2\pi] \cup [t_1, 2\pi]$ est l'union de deux intervalles disjoints.



$[t_1, t_2] \subset [0, 2\pi]$ $\qquad$ $t_1 < 0$ $\qquad$ $t_2 > 2\pi$

III.A.2b Notons $M_0 = (x_0, y_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$. f étant continue en M_0, je dispose de $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \bar{D}(M_0, \delta),\ |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Pour tout $t \in I_0^\delta$, et en notant $M(t) = (\cos t, \sin t)$, j'ai (par définition de I_0^δ) $|f(M(t)) - f(M(t_0))| \leq \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$ et donc (par l'inégalité triangulaire)

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) \big(f(M(t)) - f(M(t_0))\big)\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{I_0^\delta} |N(x, y, t)|\, \mathrm{d}t$$

Comme N est positive et $I_0^\delta \subset [0, 2\pi]$, j'en déduis (en utilisant **II.D.4**) que

$$\boxed{\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) \big(f(M(t)) - f(M(t_0))\big)\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{[0,2\pi]} N(x, y, t) \mathrm{d}t = \tfrac{\varepsilon}{2}}$$

III.A.2c Posons $M = (x, y)$, $M(t) = (\cos t, \sin t)$ et $M_0 = M(t_0)$.
On suppose donc que $\|M - M_0\| \leq \delta/2$ et que $\|M(t) - M_0\| > \delta$ (par définition de I_0^δ).
Par l'inégalité triangulaire j'ai

$$\|M - M(t)\| \geq \|M(t) - M_0\| - \|M_0 - M\| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \geq 0$$

En élevant au carré (opération croissante sur $\mathbb{R}^+$) puis en passant à l'inverse (opération décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$) j'en déduis que

$$\frac{1}{(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2} \leq \frac{4}{\delta^2}$$

et ainsi

$$\boxed{|N(x, y, t)| = N(x, y, t) \leq 4 \cdot \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}.}$$

III.A.2d f étant continue sur $C(0, 1)$ qui est non vide, fermé et borné, elle est bornée et atteint ses bornes. Une majoration grossière donne

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) \big(f(M(t)) - f(M_0)\big)\, \mathrm{d}t \right| \leq 2 \max_{C(0,1)} |f| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) \mathrm{d}t$$

Si j'impose $\|M - M_0\| \leq \delta/2$, je peux alors utiliser la question précédente pour affirmer (majoration grossière de $N(x, y, t)$ par une constante et multiplication par 2π qui majore la taille de l'intervalle d'intégration)

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t)(f(M(t)) - f(M_0))\, \mathrm{d}t \right| \leq 16\pi \max_{C(0,1)} |f| \cdot \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2} = K \cdot \big(1 - (x^2 + y^2)\big)$$

où K ne dépend pas de M. Par continuité de $M \mapsto \|M\|$ (qui est 1-lipschitzienne !), je dispose de η_1 tel que si $\|M - M_0\| \leq \eta_1$ alors $K \cdot \big(1 - (x^2 + y^2)\big) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. En posant $\eta = \min(\eta_1, \delta/2)$, je peux alors tout combiner pour obtenir

$$\boxed{\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t)(f(M(t)) - f(M_0))\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.}$$

III.A.3 Fixons t_0 dans $[0, 2\pi]$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver $\eta > 0$ tel que

$$\forall\,(x,y) \in \bar{D}\,(0,1) \quad \|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\| \leq \eta \Rightarrow |u(x,y) - u(\cos t_0, \sin t_0)| \leq \varepsilon$$

Notons que l'expression de $|u(x,y) - u(\cos t_0, \sin t_0)|$ peut prendre deux formes :

- si $(x,y) \in C(0,1)$, elle s'écrit $|f(x,y) - f(\cos t_0, \sin t_0)|$ et par continuité de f, il existe un η_1 tel qu'elle soit inférieure à ε pour $\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\| \leq \eta_1$.
- sinon elle s'écrit
$$|u(x,y) - u(\cos t_0, \sin t_0)| = \left|\int_0^{2\pi} N(x,y,t)\,\big(f(M(t)) - f(M_0)\big)\,\mathrm{d}t\right|$$
et **III.A.2b** donne une valeur de δ pour laquelle **III.A.2d** donne une valeur η_2. J'ai alors, en découpant l'intégrale sur I_0^δ et son complémentaire,
$$\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\| \leq \eta_2 \Rightarrow |u(x,y) - u(\cos t_0, \sin t_0)| \leq \varepsilon$$

En prenant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, j'obtiens une valeur convenable et donc

$$\boxed{u \text{ est continue en tout point de } C\,(0,1).}$$

Je conclus alors que $u \in \mathcal{D}_f$, c'est-à-dire que

$$\boxed{u \text{ est une solution sur } D\,(0,1) \text{ du problème de Dirichlet associé à } f.}$$

III.B.1a Par hypothèse, u_n admet un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y})$ qui est intérieur à $D(0,1)$. Avec la question **I.A.1a**, $x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$ ne prend que des valeurs au moins égales à $u_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ sur un intervalle ouvert contenant $\tilde{x}$.
Or, si une fonction $g \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$ atteint un maximum en c, $g'(c) = 0$ et alors (Taylor-Young)

$$g(c+h) - g(c) = \frac{h^2}{2} g''\,(c) + o\left(h^2\right)$$

et donc $g''(c) \leq 0$ (sinon, $g(c+h) - g(c) \underset{h \to 0}{\sim} \dfrac{h^2}{2} g''(c)$ est localement strictement positive ce qui contredit le fait que g admette un maximum local en c).
En appliquant ce résultat à $g : x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$, j'en déduis que $\partial_1 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ et

$$\boxed{\partial_{1,1} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0.}$$

III.B.1b Un calcul direct donne (sachant que u est harmonique)

$$\forall (x,y) \in D(0,1) \quad \Delta u_n(x,y) = \frac{4}{n} > 0$$

et la question précédente montre, par l'absurde, que

$$\boxed{u_n \text{ n'admet pas de maximum local sur } D(0,1).}$$

III.B.2 Cependant u_n, étant continue sur le fermé borné non vide $\bar{D}(0,1)$, admet un maximum sur cet ensemble, atteint en un point de $C(0,1)$ où u_n prend la valeur $1/n$ (car u est nulle sur le cercle). J'ai ainsi

$$\boxed{\forall (x,y) \in \bar{D}(0,1) \quad u_n(x,y) \leq \frac{1}{n}.}$$

III.B.3 Ce qui précède est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Je peux (à (x,y) fixé quelconque) faire tendre n vers l'infini pour en déduire que

$$\boxed{\forall (x,y) \in \bar{D}(0,1) \quad u(x,y) \leq 0.}$$

Mais $-u$ est clairement solution du même problème que u et j'ai donc aussi la positivité de u. Finalement

$$\boxed{\forall (x,y) \in \bar{D}(0,1) \quad u(x,y) = 0.}$$

III.C Nous avons construit au **III.A** un élément u de $\mathcal{D}_f$ (existence d'une solution). Si v est un autre élément, alors $u - v$ est solution de $\mathcal{D}_0$ et est donc nulle d'après **III.B**. Il y a donc unicité de ladite solution.

$$\boxed{\mathcal{D}_f \text{ est un singleton.}}$$

IV. Retour sur les polynômes harmoniques

IV.A.1 La linéarité de ϕ_{m-2} est immédiate :

$$\phi_{m-2}(Q_1 + \lambda Q_2) = \phi_{m-2}(Q_1) + \lambda\phi_{m-2}(Q_2).$$

Si $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$ alors $\tilde{Q} \in \mathcal{P}_m$ et donc $\Delta\tilde{Q} \in \mathcal{P}_{m-2}$ (une dérivation partielle faisant perdre au moins un degré). J'en déduis que

$$\boxed{\operatorname{Im}(\phi_{m-2}) \subset \mathcal{P}_{m-2}}$$

c'est-à-dire que ϕ_{m-2} peut être vu comme un endomorphisme de $\mathcal{P}_{m-2}$.
Soit $Q \in \operatorname{Ker}(\phi_{m-2})$. J'ai $\Delta\tilde{Q} = 0$. $\tilde{Q}$ est ainsi solution de $\mathcal{D}_0$ (puisque $\tilde{Q}$ est nulle sur $C(0,1)$). D'après la question **III.B**, $\tilde{Q} = 0$. Or, $Q \mapsto \left(1 - x^2 - y^2\right) Q$ est injective (elle est linéaire et, si $\left(1 - x^2 - y^2\right) Q$ est nul sur $D\,(0,1)$, alors Q est également nul sur $D(0,1)$ (où $1 - x^2 - y^2 > 0$). Le **I.A.1** montre alors que $Q = 0$:

$$\boxed{\phi_{m-2} \text{ est injective.}}$$

IV.A.2 En tant qu'endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, ϕ_{m-2} est un automorphisme de $\mathcal{P}_{m-2}$. Comme $\Delta(-P) \in \mathcal{P}_{m-2}$, il admet un antécédent T par ϕ_{m-2}. J'ai alors $\Delta\tilde{T} = \Delta(-P)$ c'est-à-dire que $P + \tilde{T}$ est harmonique. Autrement dit,

$$\boxed{\text{Il existe } T \in \mathcal{P}_{m-2} \text{ tel que } P + \left(1 - x^2 - y^2\right) T \text{ soit harmonique.}}$$

IV.A.3 $u = P + \left(1 - x^2 - y^2\right) T$ est harmonique et coïncide avec P_C sur le cercle unité. C'est donc une solution de $\mathcal{D}_{P_C}$. Grâce à **III.C** je peux dire que c'est l'unique solution. Et comme $T \in \mathcal{P}_{m-2}$, cette solution est dans $\mathcal{P}_m$.

IV.A.4 D'après **IV.A.2** je peux trouver des réels a, b, c tels que

$$H : (x, y) \mapsto x^3 + \left(1 - x^2 - y^2\right)(ax + by + c)$$

soit harmonique. Tous calculs faits, $\Delta H\,(x, y) = (6 - 8a)\,x - 8by - 4c$ donc $(a, b, c) = (3/4, 0, 0)$ convient. Ainsi d'après la question précédente,

$$\boxed{\mathcal{D}_{P_C} = \left\{(x, y) \mapsto x^3 + \frac{3x}{4}\left(1 - x^2 - y^2\right)\right\}}$$

IV.B.1 L'existence d'une décomposition est donnée par la question **IV.A.2** (je peux toujours trouver un $m \geq 2$ tel que $P \in \mathcal{P}_m$). Supposons que l'on puisse trouver deux décompositions. J'ai alors H_1, H_2 harmoniques et Q_1, Q_2 polynômes tels que

$$H_1(x, y) + \left(1 - x^2 - y^2\right) Q_1(x, y) = H_2(x, y) + \left(1 - x^2 - y^2\right) Q_2(x, y)$$

Posons $Q = Q_1 - Q_2$; il existe $m \geq 2$ tel que $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$. La relation précédente donne $\Delta\tilde{Q} = 0$ et donc $Q \in \operatorname{Ker}(\phi_{m-2})$. Cela donne (par injectivité) la nullité de Q et donc $Q_1 = Q_2$. $H_1 = H_2$ en découle.

$$\boxed{P \text{ se décompose ainsi de manière unique.}}$$

IV.B.2 Soit $m \geq 2$. L'application $p \mapsto \Delta p$ est linéaire de $\mathcal{P}_m$ dans $\mathcal{P}_{m-2}$ et elle est surjective : soit $q \in \mathcal{P}_{m-2}$; le **IV.A.1** fournit $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $q = \Delta\widetilde{Q}$; or $\widetilde{Q}$ est un élément de $\mathcal{P}_m$. Le théorème du rang donne alors :

$$\boxed{\dim \mathcal{H}_m = \dim \mathcal{P}_m - \dim \mathcal{P}_{m-2} = 2m + 1.}$$

Noter que le résultat reste vrai pour $m \in \{0, 1\}$ (dans ces deux cas $\mathcal{H}_m = \mathcal{P}_m$).

IV.B.3 Pour trouver une base $\mathcal{H}_3$, il suffit d'exhiber 7 polynômes harmoniques de degré au plus 3 et linéairement indépendants. Certains sont immédiats comme 1, x, y, xy. Nous avons vu au **I.B.2** que $x^2 - y^2$ convient aussi. Au **IV.A.4** nous en avons trouvé un 6$^{\text{e}}$, de degré 3. Et par symétrie des rôles de x et y, j'en déduis un 7$^{\text{e}}$! J'obtiens ainsi une famille de 7 éléments de $\mathcal{H}_3$ dont on vérifie aisément l'indépendance linéaire.

$$\boxed{\mathcal{H}_3 = \operatorname{Vect}\left(1, x, y, xy, x^2 - y^2, x^3 + \frac{3x}{4}\left(1 - x^2 - y^2\right), y^3 + \frac{3y}{4}\left(1 - x^2 - y^2\right)\right).}$$

N.B. On peut aussi utiliser $x^3 - 3xy^2$ et $y^3 - 3x^2y$ qui permettent d'utiliser directement le **I.A** pour obtenir l'indépendance linéaire...

IV.C.1 Il s'agit des "classiques" combinaisons avec répétitions… Cf. T.D. 0, exo 1 pour une démonstration par récurrence. Le résultat peut également être obtenu directement grâce à une modélisation habile (et classique !).
Notons $\mathcal{S}_{m,n} = \left\{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \ / \ i_1 + \cdots + i_n = m\right\}$ et $\mathcal{E}_{m,n}$ l'ensemble des $(m+n-1)$-uplets contenant exactement m fois 0 et $n-1$ fois 1. Je construis une bijection de $\mathcal{E}_{m,n}$ dans $\mathcal{S}_{m,n}$ (l'idée étant de voir les 1 comme des "séparateurs" parmi les m zéros) : soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m+n-1}) \in \mathcal{E}_{m,n}$; je lui associe le n-uplet $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ défini ainsi :

- i_1 est le nombre de zéros avant le 1^{er} 1 ($i_1 = 0$ si $\varepsilon_1 = 1$!)
- pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, i_k est le nombre de zéros entre le $(k-1)$-ième et le k-ième 1
- i_n est le nombre de zéros après le dernier 1 ($i_n = 0$ si $\varepsilon_{m+n-1} = 1$!)

Comme j'ai m zéros dans $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m+n-1})$, j'ai bien $(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}_{m,n}$.
De plus, cette application est clairement une bijection : l'unique antécédent de $(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}_{m,n}$ se remplit en plaçant i_1 zéros, puis un 1, puis i_2 zéros, puis un 1, etc., en terminant pas i_n zéros.

Or le cardinal de $\mathcal{E}_{m,n}$ vaut clairement $\dbinom{n+m-1}{n-1}$: il s'agit de choisir les $n-1$ places des 1 parmi les $m+n-1$ places disponibles et de compléter par des 0 ; on peut aussi placer d'abord les 0 et l'on retrouve la relation classique $\dbinom{n+m-1}{n-1} = \dbinom{n+m-1}{m}$…

$$\boxed{\operatorname{Card} \mathcal{S}_{m,n} = \binom{m+n-1}{m}.}$$

Par ailleurs, par construction $\operatorname{Card} \mathcal{S}_{m,n}$ est le nombre de "monômes" de degré m dans l'écriture d'un polynôme à n indéterminées. J'en déduis le nombre d'éléments de la base "canonique" de $\mathcal{P}_m$:

$$\boxed{\dim \mathcal{P}_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{k}.}$$

IV.C.2 On obtiendrait comme au **IV.B** que tout polynôme de $\mathcal{P}_m$ se décompose de manière unique sous la forme

$$H(x_1, \dots, x_n) + \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) Q(x_1, \dots, x_n)$$

où $H \in \mathcal{H}_m$ et $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$. Et on en déduirait de même que

$$\dim \mathcal{H}_m = \dim \mathcal{P}_m - \dim \mathcal{P}_{m-2}$$

d'où grâce à la question précédente

$$\boxed{\dim \mathcal{H}_m = \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1}.}$$