Exercice

1) Manifestement, l'énoncé suppose $N(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ (c'est presque sûr !) et $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
La variable aléatoire N compte le nombre d'essais avant le premier succès (pile), elle suit donc **la loi géométrique de paramètre** p.

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad P(N = n) = (1-p)^{n-1}p.}$$

Sachant que $N = n$ (avec $n \geq 1$ fixé), on compte le nombre de piles au cours de n lancers, il s'agit de **la loi binomiale de paramètres** n et p.

$$\boxed{P(X = k \mid N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

2) Pour $n \geq 1$ et $k \in [\![0, n]\!]$, j'applique la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(N = n, X = k) &= P(X = k, N = n) \\ &= P(X = k \mid N = n) \times P(N = n) \\ &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \times (1-p)^{n-1}p \end{aligned}$$

Soit, avec la convention habituelle $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin [\![0, n]\!]$,

$$\boxed{\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad P(N = n, X = k) = \tbinom{n}{k}p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1}.}$$

3) En écrivant $f(x)$ sous la forme $(1-x)^{-1}$, il vient par récurrence immédiate, pour $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.}$$

En dérivant k fois le développement en série entière suivant sur l'**intervalle ouvert de convergence** $]-1, 1[$,

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

j'obtiens

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)x^{n-k}$$

ou encore

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+k}{k} x^m.}$$

4) En utilisant le système (quasi-)complet d'événements $\big((N = n)\big)_{n \geq 1}$, j'ai pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k, N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k, N = n) \text{ car pour } n < k, \text{ la proba. est nulle } \textbf{et que } k \geq 1 \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1} = p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2(n-k)} \\ &= p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \frac{1}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} \text{ grâce au } \textbf{3} \\ &= p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \frac{1}{p^{k+1}(2-p)^{k+1}} \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=0, N=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^1 (1-p)^{2n-1} \text{ (subtile différence car } n = k = 0 \text{ est exclu)} \\ &= p(1-p) \sum_{m=0}^{+\infty} (1-p)^{2m} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p} \end{aligned}$$

En conclusion

$$\boxed{P\left(X=0\right) = \frac{(1-p)}{(2-p)} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad P\left(X=k\right) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.}$$

5) a) D'après le cours, les variables aléatoires U et V étant indépendantes, j'ai

$$E(Y) = E(UV) = E(U) \times E(V) = \lambda \times \frac{1}{\lambda}$$

Soit

$$\boxed{E\left(Y\right) = 1.}$$

b)

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P((U=0) \cup (V=0)) \\ &= P(U=0) \text{ car } P(V=0) = 0 \\ &= 1-\lambda. \end{aligned}$$

Pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= P(Y=k, U=0) + P(Y=k, U=1) \\ &= 0 + P(Y=k \mid U=1) \times P(U=1) = (1-\lambda)^{k-1}\lambda^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(Y=0\right) = 1-\lambda \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad P\left(Y=k\right) = (1-\lambda)^{k-1}\lambda^2.}$$

c) Je note $\mathbb{V}$ la variance pour éviter les confusions. J'ai

$$\mathbb{V}(Y) = E\left(Y^2\right) - E\left(Y\right)^2$$

Or $U^2 = U$ et V^2 sont indépendantes, donc

$$E\left(Y^2\right) = E\left(U^2V^2\right) = E\left(U^2\right) \times E\left(V^2\right) = E\left(U\right) \times E\left(V^2\right) = \lambda \times E\left(V^2\right)$$

Et je connais la variance pour une loi géométrique :

$$\mathbb{V}(V) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2} = E\left(V^2\right) - E\left(V\right)^2 = E\left(V^2\right) - \frac{1}{\lambda^2}$$

donc $E\left(V^2\right) = \dfrac{2-\lambda}{\lambda^2}$ d'où $E\left(Y^2\right) = \dfrac{2-\lambda}{\lambda}$ et donc $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{2-\lambda}{\lambda} - 1$.

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = 2\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right).}$$

6) En posant λ tel que $1-\lambda = \dfrac{1-p}{2-p}$ c'est-à-dire $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{2-p}}$, je constate que

$$P(Y=0) = \frac{1-p}{2-p} \quad \text{et, pour } k \geq 1,\ P(Y=k) = (1-\lambda)^{k-1}\lambda^2 = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

donc finalement

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ont même loi.}}$$

Problème

I – Étude d'une suite récurrente

I.A.1) f est croissante et $u_0 = 0 \leq u_1$, donc une récurrence immédiate montre que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n, c'est-à-dire que (u_n) est croissante ; de plus elle est majorée par 1, donc elle converge.

I.A.2) L'application $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue avec $g(1) = 0$.
g étant continue sur $[0,1]$, alors $\{x \in [0,1] \ / \ f(x) = x\} = g^{-1}(\{0\})$ est une partie de $\mathbb{R}$ fermée, bornée et non vide donc admet un plus petit élément x_f (une borne inférieure qui appartient à l'ensemble car il est fermé).

I.A.3) J'ai $u_0 \leq x_f$, d'où $u_n \leq x_f$ pour tout n, par récurrence puisque f est croissante et $f(x_f) = x_f$. Par passage à la limite, j'en déduis $\ell \leq x_f$; or, f étant continue, ℓ est un point fixe de f (par unicité de la limite, puisque la sous-suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ et $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$). Comme x_f est le plus petit point fixe de f, j'ai finalement

$$\boxed{\ell = x_f.}$$

***I.B*)** On suppose que $m > 1$. Alors la fonction g ci-dessus est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $g(1) = 0$ et $g'(1) = m-1 > 0$. Donc je dispose de $x \in \,]0,1[$ tel que $g(x) < 0$ (sinon les taux de variation $\dfrac{g(x) - g(1)}{x-1}$ seraient tous négatifs ou nuls et donc $g'(1)$ aussi). Comme $g(0) = f(0) \geq 0$ et g continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule en au moins un point de $[0,x[$, c'est-à-dire que f admet un point fixe dans $[0,x[$. Or $x < 1$ et x_f est le plus petit point fixe de f, donc

$$\boxed{x_f \in [0,1[.}$$

***I.C*)** On suppose ici que $m \leq 1$. Supposons par l'absurde que $x_f < 1$.
D'après le théorème de Rolle, je dispose de $c \in]x_f, 1[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = 1$. Or f' est positive et croissante par hypothèse, donc $m = 1$ et f' constante sur $[c,1]$, ce qui est absurde car $f''(1) > 0$. D'où $x_f = 1$ et par conséquent g ne s'annule qu'en 1. Donc : $\forall x \in [0,1[\quad f(x) > x$ (car $g(0) \geq 0$ et g continue).
Supposons un instant $x \in [0,1[$ tel que $f(x) = 1$; comme f est croissante et à valeurs dans $[0,1]$, j'aurais alors f constante sur $[x,1]$ ce qui contredit à nouveau le fait que $f''(1) > 0$. Par conséquent : $\forall x \in [0,1[\quad f(x) < 1$.
Comme $u_0 < 1$, une récurrence banale montre alors que pour tout n, $u_n < 1$.

$$\boxed{x_f = 1 \text{ et, pour tout } n,\ u_n < 1.}$$

***I.D*)** Dans cette question, on suppose que $m = 1$.

I.D.1) On a posé pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_n > 0$. De plus, f étant $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor en 1 me donne, comme $f'(1) = m$,

$$-\varepsilon_{n+1} = f(u_n) - f(1) = m(u_n - 1) + \frac{f''(1)}{2}(u_n-1)^2 + o\left((u_n-1)^2\right)$$

or ici $m = 1$: $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \dfrac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o\left(\varepsilon_n^2\right)$. D'où

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o\left(\varepsilon_n^2\right)} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\frac{1}{1 - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)} - 1\right) = \frac{f''(1)}{2} + o(1).$$

En conclusion

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}.}$$

I.D.2) D'après le lemme de Cesàro appliqué à la suite de la question précédente :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k}\right) = \frac{f''(1)}{2}$$

or après l'hécatombe

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \sim \frac{1}{n\varepsilon_n}$$

car la constante $\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{\varepsilon_n}$ qui tend vers l'infini. En conclusion, comme $f''(1)$ est non nul,

$$\boxed{\varepsilon_n = 1 - u_n \sim \frac{2}{nf''(1)}.}$$

I.E) Dans cette question, on suppose que $m < 1$. D'après ***I.C)*** $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_n > 0$.

I.E.1) Le développement du **I.D.1** donne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m \in [0,1[$; alors, d'après la règle de d'Alembert,

$$\boxed{\text{La série de terme général } \varepsilon_n \text{ est absolument convergente.}}$$

Notons que $m = f'(1)$ ne peut pas être nul, puisque f' est positive et strictement croissante au voisinage de 1, selon l'hypothèse $f''(1) > 0$ et par continuité de f''. Ainsi $m \in]0,1[$ et le développement du **I.D.1** donne

$$\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o\left(\varepsilon_n^2\right) \quad \text{d'où} \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} = 1 - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n.$$

Comme $f''(1)$ est non nul, il en résulte que

$$\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right) = \ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) \sim -\frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n.$$

Or nous venons de voir que $\sum \varepsilon_n$ est absolument convergente, donc

$$\boxed{\text{La série de terme général } \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right) \text{ est absolument convergente.}}$$

I.E.2) Ainsi la série de terme général $\ln\left(m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}\right) - \ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)$ converge ; par télescopage il en résulte que la suite de terme général $w_n = \ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)$ converge vers un certain réel w ; alors par continuité de la fonction exponentielle, la suite de terme général $m^{-n}\varepsilon_n$ converge vers $c = e^w > 0$. D'où l'existence d'un réel $c > 0$ tel que :

$$\boxed{\varepsilon_n = 1 - u_n \sim c.m^n.}$$

II – Formule de Wald

II.A.1) X et Y étant deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, j'ai

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} P(X=j, Y=k-j) = \sum_{j=0}^{k} P(X=j)P(Y=k-j).$$

Par conséquent, la série entière G_{X+Y} est le produit de Cauchy des séries entières G_X et G_Y (nous avons convergence absolue en tout point de $[-1,1]$). En conclusion

$$\boxed{G_{X+Y} = G_X G_Y.}$$

Noter que c'est une question de cours que l'on peut aussi traiter en considérant $E\left(t^{X+Y}\right)\ldots$

II.A.2) Noter que l'énoncé admet le "lemme des coalitions", ce qui permet d'appliquer le résultat précédent dans une récurrence banale ; or les X_k ont toutes comme fonction génératrice G_X et $S_0 = 0$, donc $G_{S_0} = 1$ pour l'initialisation :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad G_{S_k} = (G_X)^k.}$$

II.A.3) À nouveau, l'énoncé admet que T est indépendante de S_k pour tout k. Soit $t \in [0,1]$; comme $((T=k))_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, j'ai

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(S=n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S=n, T=k),$$

d'où

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(S=n, T=k)\, t^n\right).$$

Or la relation $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$ pour tout ω de Ω montre l'égalité des événements :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \quad (S=n, T=k) = (S_k=n, T=k).$$

Comme S_k et T sont indépendantes, j'ai
$$G_S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}P(S_k=n)\,P(T=k)\,t^n\right).$$
Fixons maintenant $K\in\mathbb{N}$. Je fais apparaître somme partielle et reste de la série (convergente !) dont la somme est dans la parenthèse ci-dessus :
$$G_S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{K}P(S_k=n)\,P(T=k)\,t^n+\sum_{k=K+1}^{\infty}P(S_k=n)\,P(T=k)\,t^n\right).$$
En présence de la somme d'une série convergente, de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(u_n+v_n)$, il suffit de constater que $\sum u_n$ converge pour conclure que $\sum v_n$ converge également, puisque $v_n=(u_n+v_n)-u_n$! Or, pour k fixé, grâce au **II.A.2**,
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}P(S_k=n)\,P(T=k)\,t^n &= P(T=k)\sum_{n=0}^{\infty}P(S_k=n)\,t^n\\ &= P(T=k)\,G_{S_k}(t)=P(T=k)\,G_X(t)^k\end{aligned}$$
donc, s'agissant d'une somme **finie** de séries convergentes, la série de gauche ci-dessus converge et
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{K}P(S_k=n)\,P(T=k)\,t^n\right)=\sum_{k=0}^{K}P(T=k)\,G_X(t)^k.$$
Le programme de PSI ne permet pas d'intervertir les deux sommes **infinies** de droite, mais j'ai bien montré
$$\boxed{G_S(t)=\sum_{k=0}^{K}P(T=k)G_X(t)^k+R_K\text{ où }R_K=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=K+1}^{\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\right).}$$
II.A.4) Avec $t\in[0,1[$ et $K\in\mathbb{N}$ fixés, R_K apparaît comme la somme d'une série à termes positifs, donc $R_K\geq 0$. Puis, en majorant $P(S_k=n)$ par 1, j'obtiens
$$\forall k\geq K+1\quad \sum_{k=K+1}^{\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\leq t^n\sum_{k=K+1}^{\infty}P(T=k)$$
d'où puisqu'ici $|t|<1$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n=\dfrac{1}{1-t}$,
$$\boxed{0\leq R_K\leq\frac{1}{1-t}\sum_{k=K+1}^{\infty}P(T=k).}$$
II.A.5) $\sum\limits_{k=K+1}^{\infty}P(T=k)$ est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand K tend vers l'infini. Alors ce qui précède montre que $\sum P(T=k)G_X(t)^k$ converge et a pour somme $G_S(t)$. Autrement dit
$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{\infty}P(T=k)G_X(t)^k=G_T\big(G_X(t)\big)=(G_T\circ G_X)(t)$$
cela pour tout t de $[0,1[$. Ainsi, $G_T\circ G_X$ est la fonction somme d'une série entière qui coïncide avec G_S sur $[0,1[$. D'après le résultat rappelé en préambule, j'en déduis
$$\boxed{G_S=G_T\circ G_X.}$$
II.B) On suppose ici que T et les X_n sont d'espérance finie. G_X et G_T sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Alors $G_S=G_T\circ G_X$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc S admet une espérance finie, donnée par
$$E(S)=G_S'(1)=G_T'\circ G_X(1).G_X'(1)=G_T'(1)G_X'(1).$$
Autrement dit
$$\boxed{E(S)=E(T)E(X_1).}$$

II.C.1) Si T suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, sa loi est donnée par : $P(T=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. D'où sa fonction génératrice
$$\boxed{G_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}t^k=e^{(t-1)\lambda}.}$$

II.C.2) Ici $T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et pour tout i, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$ (loi de Bernoulli). Or le nombre d'insectes issus de la ponte est modélisé par la variable aléatoire S comme ci-dessus. Donc

$$\forall t \in [-1,1] \quad G_S(t) = G_T\big(G_X(t)\big) = G_T(1-\alpha+\alpha t) = e^{(-\alpha+\alpha t)\lambda} = e^{(t-1)\alpha\lambda}.$$

Je reconnais la fonction génératrice associée à la loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda$. Or la fonction génératrice caractérise la loi :

$$\boxed{\text{Le nombre d'insectes issus de la ponte suit la loi de Poisson de paramètre } \alpha\lambda.}$$

III – Processus de Galton-Watson

III.A.1) Pour n fixé, nous sommes exactement dans la situation de la partie précédente, avec Y_n à la place de T et $X_{n,i}$ à la place de X_i. Toutes les hypothèses d'indépendance étant vérifiées, le résultat du ***II.A*** donne :

$$\boxed{\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f.}$$

III.A.2) De même, d'après le ***II.B***, $E(Y_{n+1}) = E(Y_n)E(X)$ où X suit la loi μ, d'où par une récurrence immédiate, comme $E(Y_0) = 1$ et $E(X) = m$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad E(Y_n) = m^n.}$$

III.A.3a) Par définition, l'événement “il y a extinction” est $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (Y_n = 0)$; or par définition de Y_{n+1}

$$\forall \omega \in \Omega \quad Y_n(\omega) = 0 \Rightarrow Y_{n+1}(\omega) = 0$$

donc la suite d'événements $\big((Y_n = 0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, par continuité croissante de P,

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Y_n = 0)\right) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n = 0).$$

Or, par définition de la fonction génératrice, pour tout n, $P(Y_n = 0) = \varphi_n(0)$. Au final

$$\boxed{\text{La probabilité d'extinction est } \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0).}$$

III.A.3b) f est la fonction génératrice de la loi μ qui admet une espérance et une variance, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$; les dérivées première et seconde de f sur $[0,1]$ s'obtiennent par dérivation terme à terme d'une série entière dont tous les coefficients sont positifs, donc f' et f'' sont à valeurs positives. De même pour f, qui est en outre à valeurs dans $[0,1]$ puisque, pour $t \in [0,1]$, $f(t)$ est majoré par $f(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. De plus $f'(0) = p_1 < 1$ puisque $p_0 + p_1 < 1$ par hypothèse. Et enfin

$$f''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k > 0$$

car il existe $k \geq 2$ tel que $p_k > 0$, selon la même hypothèse.

Donc f vérifie toutes les hypothèses de la partie **I**.

Or $\varphi_0 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ et le **III.A.1** montre par une récurrence immédiate que $\varphi_n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois). Il en résulte, par associativité de la loi $\circ$, que f et φ_n commutent. Ainsi la relation du **III.A.1** (qui semblait à l'envers !) s'écrit aussi $\varphi_{n+1} = f \circ \varphi_n$. En particulier la valeur en 0 montre que la suite $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la partie **I**. En conclusion

$$\boxed{\text{On peut appliquer les résultats de la partie } \mathbf{I} \text{ à la suite } \big(\varphi_n(0)\big)_{n\geq 0}.}$$

III.A.4) Si $m \leq 1$, d'après **I.C** $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 1$:

$$\boxed{\text{Si } m \leq 1 \text{, la probabilité d'extinction est égale à 1.}}$$

III.B.1) Pour tout entier non nul k, $(T = k) \subset (Y_{k-1} \geq 1)$ donc

$$0 \leq kP(T = k) \leq kP(Y_{k-1} \geq 1) = k\left(1 - \varphi_{k-1}(0)\right).$$

Or ici $m < 1$, donc d'après **I.E** je dispose de $c > 0$ tel que $1 - \varphi_{k-1}(0) \sim c.m^{k-1}$. Et la série de terme général km^{k-1} converge (en tant que $O\left(1/k^2\right)$ car $k^3 m^{k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ par croissances comparées). Il en résulte que $\sum kP(T = k)$ converge absolument. Autrement dit

$$\boxed{T \text{ admet une espérance.}}$$

III.B.2a) J'ai par σ-additivité, pour n fixé,

$$P(Y_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y_n = k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} kP(Y_n = k) = E(Y_n),$$

d'où grâce au **III.A.2** (il s'agit d'un cas particulier de l'inégalité de Markov !)

$$\boxed{P(Y_n \geq 1) \leq m^n.}$$

III.B.2b) En particulier j'ai $m \leq 1$, donc d'après le **III.A.4** la probabilité d'extinction vaut 1, c'est-à-dire que $P(T = -1) = 0$. Par conséquent $E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(T = k)$, ce qui nous ramène à un résultat du cours, puisque tout se passe comme si T était à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T > k - 1)$$

soit par réindexation

$$\boxed{E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T > k).}$$

III.B.2c) Notons que, par définition, $(T > k) = (Y_k \geq 1)$, d'où grâce au **III.B.2a**

$$P(T > k) = P(Y_k \geq 1) \leq m^k$$

Le **III.B.2b** donne alors

$$E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T > n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m^k$$

d'où la majoration

$$\boxed{E(T) \leq \frac{1}{1-m}.}$$

III.C.1) Comme $m \leq 1$, nous avons vu au **III.A.4** que $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Y_n = 0)\right) = 1$.

$$\boxed{Z \text{ est définie presque sûrement (sur un ensemble de probabilité 1).}}$$

III.C.2a) Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme Y_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1} \geq Z_n \quad \text{d'où} \quad (Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k).$$

Donc, par continuité décroissante,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq k) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \leq k)\right).$$

Précisons cette dernière valeur : soit $\omega \in \Omega$;

- si $Z_n(\omega) \leq k$ pour tout k dans $\mathbb{N}$, alors $Z(\omega) \leq k$ par passage à la limite, par définition de Z ;
- si $Z(\omega) \leq k$, alors, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $Z_n(\omega) \leq k$ (car $Z_n \leq Z$ du fait que les Y_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Par double inclusion, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \leq k) = (Z \leq k)$ et finalement

$$\boxed{\text{La suite } \big(P(Z_n \leq k)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } P(Z \leq k).}$$

III.C.2b) Soit k fixé dans $\mathbb{N}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, comme Z_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, j'ai

$$P(Z_n = k) = P(Z_n \leq k) - P(Z_n \leq k - 1),$$

d'où, par passage à la limite grâce au **III.C.2a**,

$$\boxed{\big(P(Z_n = k)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } P(Z = k)\text{, cela pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}.}$$

III.C.2c) Fixons $K \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1[$. J'ai (toutes les séries convergent absolument)

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \big(P(Z_n = k) - P(Z = k)\big) s^k\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |P(Z_n = k) - P(Z = k)|\, s^k \end{aligned}$$

Je découpe la somme. Pour les indices $k \leq K$, je majore s^k par 1 (la somme est finie et cela ne pose pas de problème d'existence). Pour $k \geq K+1$, je remarque que $|P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq 1$ (car les deux termes sont entre 0 et 1 et leur différence est donc entre -1 et 1). Comme $\sum s^k$ converge, il n'y a à nouveau pas de problème d'existence. J'obtiens

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^{K} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \sum_{k=K+1}^{\infty} s^k$$

soit finalement, connaissant la somme d'une série géométrique :

$$\boxed{|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^{K} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \frac{s^{K+1}}{1-s}.}$$

III.C.2d) Style Cesàro... Fixons $s \in [0,1[$ et $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{K\to\infty} \dfrac{s^{K+1}}{1-s} = 0$, je dispose donc de K dans $\mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{s^{K+1}}{1-s} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. K étant ainsi fixé, d'après **III.C.2b,** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{K} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| = 0$ (somme finie de suites de limite nulle), d'où N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad \sum_{k=0}^{K} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement : $\forall n \geq N \quad |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \varepsilon$. Autrement dit, par définition de la limite, la suite $\big(G_{Z_n}(s)\big)$ converge vers $G_Z(s)$, cela pour tout s de $[0,1[$. De plus : $\forall n \in \mathbb{N} \quad G_{Z_n}(1) = G_Z(1) = 1$, donc le résultat subsiste pour $s = 1$. En conclusion

$$\boxed{\text{La suite } (G_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } G_Z \text{ sur } [0,1].}$$

III.C.3a) J'ai $Z_1 = 1 + Y_1$ et la variable aléatoire constante X égale à 1 est trivialement indépendante de Y_1. Donc le **II.A.1** s'applique et, comme $G_X(s) = s$ et $G_{Y_1} = \varphi_1 = f$,

$$\boxed{G_{Z_1}(s) = sf(s).}$$

III.C.3b) Avec le résultat admis et le **III.C.2d**, il suffit de passer à la limite, pour s fixé dans $[0,1]$, puisque f est continue.

$$\boxed{G_Z(s) = s.f\big(G_Z(s)\big).}$$

III.C.3c) Comme toute fonction génératrice, G_Z et f sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et le résultat précédent donne

$$\begin{array}{ll} \forall s \in [0,1[& G_Z'(s) = f\big(G_Z(s)\big) + s.f'\big(G_Z(s)\big).G_Z'(s) \\ \text{soit} & \big[1 - s.f'\big(G_Z(s)\big)\big].G_Z'(s) = f\big(G_Z(s)\big) \end{array}$$

or f et G_Z sont continues sur $[0,1]$, de valeur 1 en 1 ; de plus on a supposé que les variables aléatoires de loi μ admettent pour espérance m, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, or $f'(1) = m$, d'où

$$1 - s.f'\big(G_Z(s)\big) \underset{s\to1}{\longrightarrow} 1 - m \quad \text{et} \quad f\big(G_Z(s)\big) \underset{s\to1}{\longrightarrow} 1.$$

De plus, comme f' et G_Z sont croissantes sur $[0,1]$ et $f'(1) > 0$ (cf. **I.E.1**),

$$\forall s \in [0,1[\quad s.f'\big(G_Z(s)\big) < f'(1) = m \quad \text{donc} \quad 1 - s.f'\big(G_Z(s)\big) > 1 - m.$$

Alors, si $m < 1$, $1 - s.f'\big(G_Z(s)\big)$ ne s'annule pas et

$$G_Z'(s) = \frac{f\big(G_Z(s)\big)}{1 - s.f'\big(G_Z(s)\big)} \underset{s\to1}{\longrightarrow} \frac{1}{1-m},$$

donc, par le théorème de la limite de la dérivée, G_Z est dérivable en 1, donc Z admet une espérance valant $G_Z'(1) = \dfrac{1}{1-m}$.

Par contre, si $m = 1$,

$$G_Z'(s) = \frac{f\big(G_Z(s)\big)}{1 - s.f'\big(G_Z(s)\big)} \underset{s\to1}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc G_Z n'est pas dérivable en 1. En conclusion

$$\boxed{Z \text{ est d'espérance finie si et seulement si } m < 1, \text{ auquel cas } E(Z) = \frac{1}{1-m}.}$$

IV – Un exemple

Notons que les p_k vérifient bien les hypothèses de la partie **III**.

IV.A) Ici $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-t/2} = \frac{1}{2-t}$ et $f'(t) = \frac{1}{(2-t)^2}$.

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2-t} \quad \text{et} \quad m = f'(1) = 1.}$$

IV.B) J'ai $f([0,1[) = [0,1[$ et par récurrence immédiate, grâce au **III.A.1**, $\varphi_n([0,1[) = [0,1[$. En particulier,

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in [0,1[,\ \varphi_n(t) \neq 1.}$$

IV.C) Soit $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés ; par définition $a_n(t) = \dfrac{1}{\varphi_n(t)-1}$ d'où

$$\begin{aligned} a_{n+1}(t) &= \frac{1}{\varphi_{n+1}(t)-1} = \frac{1}{\dfrac{1}{2-\varphi_n(t)}-1} = \frac{2-\varphi_n(t)}{-1+\varphi_n(t)} \\ &= -1 + \frac{1}{\varphi_n(t)-1} = a_n(t) - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } t \in [0,1[, \text{ la suite } (a_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } -1.}$$

IV.D) Fixons $t \in [0,1[$; d'après le résultat précédent,

$$a_n(t) = a_0(t) - n = \frac{1}{t-1} - n = \frac{n+1-nt}{t-1}$$

d'où

$$\varphi_n(t) = 1 + \frac{1}{a_n(t)} = 1 + \frac{t-1}{n+1-nt}.$$

J'obtiens bien

$$\boxed{\varphi_n(t) = \frac{n+(1-n)t}{1+n-nt}.}$$

IV.E) La loi de Y_n se déduira du développement en série entière de φ_n. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$; forçons la chance (il s'agit en fait d'une division euclidienne) :

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n}\frac{n^2+(n-1)(-nt+n+1)-(n-1)(n+1)}{1+n-nt} = \frac{1}{n}\left(n-1+\frac{1}{1+n-nt}\right)$$

et, comme $\left|\dfrac{nt}{n+1}\right| < 1$,

$$\frac{1}{1+n-nt} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{nt}{n+1}\right)^k$$

d'où, en regroupant les termes constants,

$$\varphi_n(t) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k.$$

En conclusion, par identification des coefficients,

$$\boxed{P(Y_n = 0) = \frac{n}{n+1} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Y_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}.}$$

Notons que ces valeurs sont également correctes pour $n = 0$ (car $Y_0 = 1$).

IV.F) Comme nous l'avons vu au **III.B.2c**, $(T > n) = (Y_n \geq 1)$, d'où

$$P(T > n) = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0)$$

soit d'après le résultat précédent

$$\boxed{P(T > n) = \frac{1}{n+1}.}$$

Donc la série $\sum P(T>n)$ diverge (série harmonique). Le cours nous apprend qu'alors T n'est pas d'espérance finie. Retrouvons ce résultat (moins classique que la réciproque...) dans ce cas particulier. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kP(T=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(P(T>k-1)-P(T>k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(T>k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(T>k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(T>k) - \sum_{k=0}^{n} kP(T>k) \text{ en réindexant} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T>k) - nP(T>n) \text{ en simplifiant}
\end{aligned}$$

or $\sum P(T>n)$ diverge et $nP(T>n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\sum kP(T=k)$ diverge :

$$\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

IV.G) D'après **III.C.3b**, **pour** s fixé dans $[0,1[$,

$$G_Z(s) = \frac{s}{2-G_Z(s)} \quad \text{d'où} \quad G_Z(s)^2 - 2G_Z(s) = -s$$

et en ajoutant (habilement) 1 : $(1-G_Z(s))^2 = 1-s$.

Or $1-G_Z(s) \geq 0$, donc : $1-G_Z(s) = \sqrt{1-s}$. Finalement :

$$\boxed{G_Z(s) = 1-\sqrt{1-s}.}$$

Pour $s \in]-1,1[$, j'ai le développement en série entière classique :

$$\begin{aligned}
(1-s)^{1/2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}.(-1)^k s^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1).1.3.\cdots.(2k-3)}{2^k k!}.s^k \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{(2^k k!)(2^{k-1}(k-1)!)}.s^k
\end{aligned}$$

d'où

$$G_Z(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}.s^k$$

et la loi de Z s'en déduit par identification des coefficients :

$$\boxed{P(Z=0)=0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Z=k) = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}.}$$