Annexe 2 : Intégrales de Wallis

On s'intéresse aux intégrales

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx,$$

où $n \in \mathbb{N}$. Ces intégrales sont appelées *intégrales de Wallis* (John Wallis (1616–1703) était un mathématicien anglais. On lui doit notamment le symbole ∞, mais également des travaux en phonétique et orthophonie).

Le but de cette annexe est de rassembler divers résultats sur ces intégrales, notamment en rapport avec la démonstration de la formule de Stirling. L'étude des intégrales de Wallis ne figure pas au programme.

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$. Pour cela, on fait dans l'expression de J_n le changement de variable $x = \pi/2 - u$ pour $u \in [0,\pi/2]$, la fonction $\cos^n$ étant continue sur $[0,\pi/2]$ et la fonction $u \mapsto \pi/2 - u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$. Alors

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx = \int_{\pi/2}^0 -\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\,du = \int_{\pi/2}^0 -\sin^n(u)\,du = I_n.$$

Dans la suite, on ne s'intéressera donc qu'à I_n.

2. Pour tout n, $x \mapsto \sin^n(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,\pi/2]$. On en déduit que $I_n > 0$ pour tout n.

3. Pour tout $x \in [0,\pi/2]$, on a $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^n(x) \leqslant 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

En particulier, la suite (I_n) est bornée. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)(\sin(x) - 1)\,dx.$$

Or, pour tout $x \in [0,\pi/2]$, $\sin^n(x)(\sin(x) - 1) \leqslant 0$, ce qui implique que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

4. Limite de (I_n) : nous allons montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour cela, fixons un réel $\varepsilon > 0$ et soit $\delta \in]0,\pi/2[$ à déterminer. On peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < \pi$.

4. a. Pour tout $x \in [0,\pi/2]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sin^n(x) \leqslant 1$, et donc

$$\int_\delta^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx \leqslant \int_\delta^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Si l'on choisit $\delta = \dfrac{\pi - \varepsilon}{2}$, on obtient donc

$$\int_\delta^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

avec une majoration indépendante de n. On a de plus $\delta \in]0,\pi/2[$ car $\varepsilon \in]0,\pi[$.

4. b. Pour tout $x \in [0,\delta]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sin^n(x) \leqslant \sin^n(\delta)$, car la fonction $\sin^n$ est croissante sur $[0,\pi/2]$. On en déduit que

$$\int_0^\delta \sin^n(x)\,dx \leqslant \int_0^\delta \sin^n(\delta)\,dx = \delta\,\sin^n(\delta).$$

Or $\delta \in]0,\pi/2[$, donc $\sin(\delta) \in]0,1[$. En particulier, $\delta\,\sin^n(\delta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (suite géométrique). Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\delta\,\sin^n(\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

4. c. D'après la relation de Chasles et le point **3**,

$$0 \leqslant I_n = \int_0^\delta \sin^n(x)\,dx + \int_\delta^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx.$$

En utilisant alors les résultats des points **a** et **b**, on obtient, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $I_n \leqslant \varepsilon$. Finalement, pour tout réel $\varepsilon \in]0,\pi[$, on a montré l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant I_n \leqslant \varepsilon$: la suite (I_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque – On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée, puisque $\sin^n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $x \in [0,\pi/2[$ et $|\sin^n(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,\pi/2[$ et $n \in \mathbb{N}$.

5. Relation de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n+1}(x)\,dx.$$

On intègre alors par parties ($u = -\cos$ et $v = \sin^{n+1}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$) :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)(n+1)\cos(x)\sin^n(x)\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^n(x)\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin^n(x) - \sin^{n+2}(x))\,dx \\
&= (n+1)(I_n - I_{n+2}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, d'où : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

Sachant que $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$, on en déduit par exemple

$$I_2 = \frac{\pi}{4}, \quad I_3 = \frac{2}{3}, \quad I_4 = \frac{3\pi}{16}, \quad I_5 = \frac{8}{15}.$$

6. Formule explicite

Montrons par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\,\pi \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Initialisation : pour $p = 0$, on a

$$I_{2\times 0} = I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0+1}(0!)^2}\pi \quad \text{et} \quad I_{2\times 0+1} = I_1 = 1 = \frac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}.$$

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Montrons qu'elle est alors vraie pour $p+1$: on a $I_{2(p+1)} = I_{2p+2}$, donc, d'après le point **5** (avec $n = 2p$),

$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}.$$

Avec l'hypothèse de récurrence, on en déduit :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} &= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\pi \\
&= \frac{(2p+1)!}{(2p+2)\, 2^{2p+1}\, (p!)^2}\pi \\
&= \frac{(2p+2)!}{(2p+2)^2\, 2^{2p+1}\, (p!)^2}\pi \\
&= \frac{(2p+2)!}{4(p+1)^2\, 2^{2p+1}\, (p!)^2}\pi \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+3}\, (p+1)!^2}\pi,
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat souhaité. De même, avec le point **5** (avec $n = 2p+1$),

$$I_{2(p+1)+1} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)+1} &= \frac{2p+2}{2p+3} \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{(2p+2)^2\, 2^{2p}(p!)^2}{(2p+2)(2p+3)(2p+1)!} \\
&= \frac{4(p+1)^2\, 2^{2p}\, (p!)^2}{(2p+3)!} \\
&= \frac{2^{2p+2}(p+1)!^2}{(2p+3)!},
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité. Les deux égalités sont donc vraies pour tout $p \in \mathbb{N}$.

7. Comportement asymptotique

7. a. Par décroissance de la suite (I_n) et d'après le point **5**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

En divisant par I_n, qui est strictement positif d'après le point **2**, on en déduit

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

Par encadrement, on a donc $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \to 1$, *i.e.* $I_{n+1} \sim I_n$.

7. b. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Pour $n = 0$, on a bien $(1+0)I_0 I_1 = 1 \times \dfrac{\pi}{2} \times 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant l'égalité vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$. D'après le point **5** :

$$(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_nI_{n+1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Donc $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = \frac{\pi}{2}$, ce qui termine la récurrence.

7. c. Sachant que $n+1 \sim n$ et $I_{n+1} \sim I_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ (point **7. a**), on en déduit que $(n+1)I_nI_{n+1} \sim nI_n^2$. Donc, d'après le point précédent, $nI_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$, ce qui implique $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et finalement, sachant que $I_n > 0$:

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

7. d. Application : équivalent de $\binom{2n}{n}$

D'après le point **6**, on a

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, d'après le point précédent, $I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$. Ainsi

$$\frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

On en déduit que

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Remarque – Comme nous l'avons montré dans le cours, les intégrales de Wallis permettent d'obtenir un équivalent de $n!$: il s'agit de la formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$