Intégrale de Gauss

1) Définition et existence.

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$. On en déduit que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ existe et s'appelle l'intégrale de Gauss.

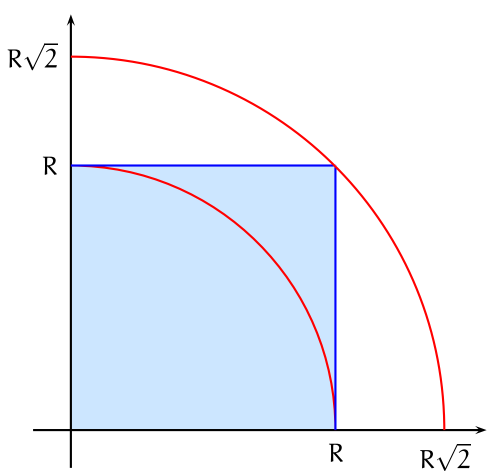
2) Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

a) Premier calcul. Puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x^2}\,dx$.

Pour R réel strictement positif donné, on pose $I(R) = \displaystyle\int_0^R e^{-x^2}\,dx$. On a

$$(I(R))^2 = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy\right) = \iint_{(x;y)\in[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \text{ (intégrales indépendantes).}$$

Le terme $x^2 + y^2$ invite à passer en polaires mais le domaine d'intégration n'est pas parfaitement adapté à ce changement de variables.



La fonction à intégrer est positive et, dans le but d ?encadrer $I(R)$, on encadre le domaine d'intégration entre les deux quarts de disque noté $D(R)$ et $D(R\sqrt{2})$ où $D(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
On a bien $D(R) \subset [0, R]^2 \subset D(R\sqrt{2})$ car

$$(x, y) \in D(R) \Rightarrow 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq R^2 \Rightarrow 0 \leq x \leq R \text{ et } 0 \leq y \leq R,$$

et de même

$$(x, y) \in [0, R]^2 \Rightarrow 0 \leq x \leq R \text{ et } 0 \leq y \leq R \Rightarrow 0 \leq x,\ 0 \leq y \text{ et } x^2 + y^2 \leq R^2 + R^2 = 2R^2.$$

Par positivité de l'intégrale et additivité par rapport au domaine d'intégration, on obtient

$$\iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leq \iint_{[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \leq \iint_{D(R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Pour $R > 0$, posons alors $J(R) = \displaystyle\iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$. En passant en polaires, on obtient

$$J(R) = \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{r\in[0,R],\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_0^R r\,dr\right) \text{ (intégrales indépendantes)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}).$$

Puis en remplaçant R par $R\sqrt{2}$, on obtient $J(R\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$. L'encadrement obtenu plus haut s'écrit alors $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leq (I(R))^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$ ou encore, puisque $I(R)$ est positif,

$$\forall R > 0,\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1 - e^{-R^2}} \leq \int_0^R e^{-x^2}\ dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1 - e^{-2R^2}}.$$

Quand R tend vers $+\infty$, on obtient en particulier la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et par parité } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.$$

Remarque. On peut directement passer en polaires dans $(I(R))^2$ pour obtenir

$$\begin{aligned}(I(R))^2 &= \iint_{[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy = 2\iint_{0\leq x\leq y\leq R} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy = 2\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{R/\cos\theta} e^{-r^2} r\ dr\right) d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/4}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{R/\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/4}\left(1 - e^{-R^2/\cos^2\theta}\right) d\theta = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} e^{-R^2/\cos^2\theta} d\theta.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall R > 0,\ \int_0^R e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} e^{-R^2/\cos^2\theta} d\theta}.$$

On peut alors analyser directement $\lim\limits_{R\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} e^{-R^2/\cos^2\theta} d\theta}$.

b) Deuxième calcul.

i) Définition de deux fonctions. Pour x réel, posons $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\ dt\right)^2$ puis $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt$.

ii) Dérivée de f. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}$ dt est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de plus pour x réel

$$f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\ dt.$$

iii) Dérivée de g.
Posons $\begin{array}{rccc}\Psi : & [0,1]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\end{array}$.

• Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

• Ψ admet sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ une dérivée partielle par rapport à x et pour $(x,t) \in [0,1]\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.
De plus, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$ et pour chaque $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, sir A est un réel positif donné,

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2A \times 1 = 2A = \varphi(t),$$

où φ est une fonction continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, g est de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right) dt = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ dt.$$

iv) La fonction $f+g$ est constante sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel non nul. En posant $u = xt$, on obtient

$$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,d(xt) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -f'(x).$$

Donc, pour $x \neq 0$, $(f+g)'(x) = 0$. Cette dernière égalité reste vraie pour $x = 0$ par continuité de f' et g' en 0. Ainsi $(f+g)' = 0$ et on en déduit que la fonction $f+g$ est constante sur $\mathbb{R}$. Mais alors, pour tout réel x,

$$(f+g)(x) = (f+g)(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

v) Limite de g quand x tend vers $+\infty$. Soit x un réel positif. Pour tout réel $t \in [0,1]$, on a $0 \leq \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient pour $x \geq 0$

$$0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, le théorème des gendarmes montre alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

vi) Valeur de l'intégrale de Gauss. Pour $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on a redémontré que

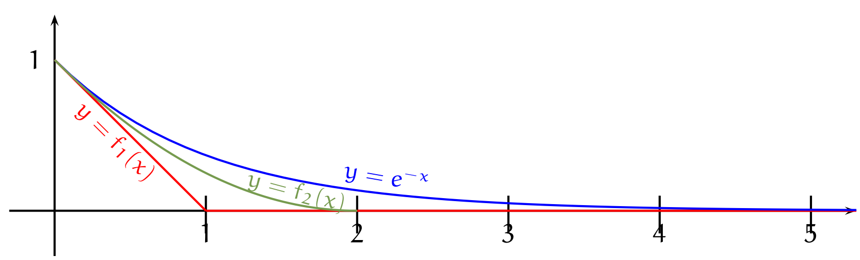
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

c) Troisième calcul.

On va obtenir l'intégrale de Gauss comme limite d'une suite d'intégrales .

i) Définition d'une suite de fonctions convergeant vers la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Pour x réel positif et n entier naturel non nul, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leq x \leq n \\ 0 \text{ si } x > n \end{cases}$ et $f(x) = e^{-x}$.

On pose aussi $g_n(x) = f_n(x^2)$ et $g(x) = f(x^2)$.



• Vérifions que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction g sur $[0,+\infty[$.

Soit $x \in [0,+\infty[$. Pour $n > x^2$, on a $g_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)}$ et donc

$$g_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(-\frac{x^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x^2+o(1)},$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = e^{-x^2} = g(x)$.

• Il est clair que pour $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ car g_n est continue sur le segment $[0,\sqrt{n}]$ et nulle sur l'intervalle $[\sqrt{n},+\infty[$.

• Montrons que pour tout entier naturel n et tout réel positif x, on a $0 \leq g_n(x) \leq g(x)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. g_n est positive sur $[0,+\infty[$. D'autre part, l'encadrement précédent est clair pour $x \in [\sqrt{n},+\infty[$.

Maintenant, si $x \in [0, \sqrt{n}[$, on a $-\dfrac{x^2}{n} \in]-1, 0]$. Il est connu que pour $u \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+u) \leq u$ (la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ est concave sur $]-1, +\infty[$ car y admet une dérivée seconde négative de sorte que son graphe est au-dessous de sa tangente en $(0, 0)$ sur $]-1, +\infty[$). On en déduit que

$$g_n(x) = e^{n \ln(1-\frac{x^2}{n})} \leq e^{n(-\frac{x^2}{n})} = e^{-x^2} = g(x).$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n| \leq g$ avec g continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

En résumé
- La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction g sur $[0, +\infty[$ et la fonction est continue sur $[0, +\infty[$.
- Chaque fonction g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- Il existe une fonction φ continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n| \leq \varphi$ à savoir $\varphi = g$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

ii) Détermination de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$. Pour $n \in \mathbb{N}*$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$.
Le changement de variables $x = \sqrt{n}\cos t$ et donc $dx = -\sqrt{n}\sin t$ fournit

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\pi/2}^{0} \left(1 - \cos^2 t\right)^n - \sqrt{n}\sin t\,dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = \sqrt{n}W_{2n+1},$$

où W_n est la n-ème intégrale de WALLIS. L'étude de ces intégrales montre que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et on retrouve encore $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

iii) Bonus. Montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu précédemment que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) - f_n(x) \geq 0$.
Posons $h_n = f - f_n$ et étudions la fonction h_n. Il est déjà clair que h_n est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $[n, \infty[$.
h_n est dérivable sur $[0, n[$ et pour $x \in [0, n[$,

$$h_n'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a pour $x \in [0, n[$

$$\mathrm{sgn}(h_n'(x)) = \mathrm{sgn}\left(e^{(n-1)\ln(1-\frac{x}{n})} - e^{-x}\right) = \mathrm{sgn}((n-1)\ln(1 - \frac{x}{n}) - (-x)) = \mathrm{sgn}((n-1)\ln(1 - \frac{x}{n}) + x).$$

Pour $x \in [0, n[$, posons $k_n(x) = (n-1)\ln(1 - \dfrac{x}{n}) + x$. k_n est dérivable sur $[0, n[$ et pour $x \in [0, n[$,

$$k_n'(x) = (n-1)\frac{-\frac{1}{n}}{1 - \frac{x}{n}} + 1 = -\frac{n-1}{n-x} + 1 = \frac{1-x}{n-x}.$$

k_n est donc strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, n[$. Comme $k_n(0) = 0$, on a $k_n(1) > 0$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to n^-} k_n(x) = -\infty$, on en déduit qu'il existe $\alpha_n \in]1, n[$ tel que $k_n(\alpha_n) = 0$ ou encore $h_n'(\alpha_n) = 0$. De plus, k_n est positive sur $[0, \alpha_n]$ et négative sur $[\alpha_n, n[$ et il en est de même de h_n'.
Mais alors, h_n est croissante sur $[0, \alpha_n]$ et décroissante sur $[\alpha_n, n[$. Comme de plus h_n est continue sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $[n, \infty[$, h_n est décroissante sur $[\alpha_n, +\infty[$. En résumé, h_n est positive sur $[0, +\infty[$, croissante sur $[0, \alpha_n]$ et décroissante sur $[\alpha_n, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq h_n(x) \leq h_n(\alpha_n).$$

Maintenant, l'égalité $h_n'(\alpha_n) = 0$ fournit $e^{-\alpha_n} = \left(1 - \dfrac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}$ et donc

$$h_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right) = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)e^{-\alpha_n} = \frac{\alpha_n e^{-\alpha_n}}{n}.$$

Enfin, la fonction $u\ :\ x \mapsto xe^{-x}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $u'\ :\ x \mapsto (1-x)e^{-x}$. La fonction u admet donc un maximum en 1 égal à $1 \times e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. On en déduit que $h_n(\alpha_n) = \dfrac{u(\alpha_n)}{n} \leq \dfrac{1}{ne}$. On a montré que

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{ne}.$$

Mais alors $\sup\{|f(x) - f_n(x)|,\ x \in [0, +\infty[\} \leq \dfrac{1}{ne}$et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{ne} = 0$, on a montré que

la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, +\infty[$.

3) Calcul de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

a) Existence de l'intégrale. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$, positive et équivalente en 0 à $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et donc intégrable sur un voisinage de 0, négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. Finalement, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) Calcul de l ?intégrale. En posant $x = u^2$ et donc $dx = 2udu$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

4) Calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$.

a) Existence. Soit n un entier naturel. La fonction $x \mapsto x^n e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto x^n e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et l ?intégrale proposée existe.

b) Calcul.

i) Relation de récurrence. Pour n entier naturel donné, posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$.
Soit A un réel positif. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+2}e^{-x^2}\,dx &= \int_0^A x^{n+1} \times xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}x^{n+1}\right]_0^A + \frac{n+1}{2}\int_0^A x^n e^{-x^2}\,dx \\ &= -\frac{A^{n+1}e^{-A^2}}{2} + \frac{n+1}{2}\int_0^A x^n e^{-x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n+2}e^{-x^2}\,dx = \frac{n+1}{2}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$. D'où la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

ii) Calcul de I_{2n} et I_{2n+1}. D'après 2), on a déjà $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'autre part, $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.
Soit alors n un entier naturel non nul.

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)}{2}\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots 2}{2^n(2n)(2n-2)\ldots 2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et

$$I_{2n+1}=\frac{(2n)}{2}\frac{2n-2}{2}\dots\frac{2}{2}I_1=\frac{n!}{2},$$

Ces égalités restant vraies pour $n=0$, on a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\ dx=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \text{et}\ \int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}\ dx=\frac{n!}{2}\ .$$

Remarque. Par le changement de variables $u=x^2$, les intégrales précédentes s'écrivent respectivement

$$\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}\ dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^ne^{-u}\ du=\frac{1}{2}\Gamma(n+1)\ \text{et}\ \int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\ dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^{n-\frac{1}{2}}e^{-u}\ du=\frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2}).$$

et on a donc montré que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma(n+1)=n!\ \text{et}\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\sqrt{\pi}.$$

5) Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(x+iy)^2}\ dx$**.** Pour y réel on pose $F(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(x+iy)^2}\ dx$.

a) Existence. Soit y un réel fixé. La fonction $x\mapsto e^{-i(x+iy)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$|e^{-(x+iy)^2}|=|e^{-x^2+y^2}\times e^{-2iy}|=e^{-x^2+y^2}.$$

Cette dernière expression est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Donc, pour tout réel y, la fonction $x\mapsto e^{-i(x+iy)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$F\ \text{est définie sur}\ \mathbb{R}.$$

b) Calcul. Soit a un réel strictement positif. Soit $f\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times[-a,a] & \to & \mathbb{C}\\ (x,y) & \mapsto & e^{-(x+iy)^2}\end{array}$.

- Pour chaque $y\in[-a,a]$, la fonction $x\mapsto f(x,y)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- f est pourvue sur $\mathbb{R}\times[-a,a]$ d'une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable y et pour $(x,y)\in\mathbb{R}\times[-a,a]$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2i(x+iy)e^{-(x+iy)^2}$. De plus
- Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, la fonction $y\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue sur $[-a,a]$,
- Pour chaque $y\in[-a,a]$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- Pour chaque $(x,y)\in\mathbb{R}\times[-a,a]$, $|f(x,y)|=2\sqrt{x^2+y^2}e^{-x^2+y^2}\leq2\sqrt{x^2+a^2}e^{-x^2+a^2}=\varphi(x)$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel y, on a

$$F?(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx=\int_{-\infty}^{+\infty}-2i(x+iy)e^{-i(x+iy)^2}\ dx=\left[ie^{-(x+iy)^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0,$$

car $|e^{-(x+iy)^2}|=e^{-x^2+y^2}\underset{x\to+\infty}{\to}0$.

F est donc constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel y, $F(y)=F(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\ dx=\sqrt{\pi}$.

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+iy)^2}\ dx=\sqrt{\pi}.$$

Enfin, puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+iy)^2}\ dx=e^{y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-2ixy}\ dx$, on a aussi montré que :

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{2ixy}\ dx=\sqrt{\pi}e^{-y^2}.$$

