Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires

Exercice 1 [04093] [Correction]
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. On définit une fonction Y par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 2 [04094] [Correction]
Soit T une variable aléatoire à valeurs naturelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(T > n) > 0.$$

On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$\theta_n = \mathrm{P}(T = n \mid T \geq n).$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe à panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant présent alors qu'il est actuellement fonctionnel.

(a) Justifier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0\,;1[.$$

(b) Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la probabilité $\mathrm{P}(T \geq n)$. En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.

(c) Inversement, soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0\,;1[\text{ et } \sum \theta_n \text{ diverge.}$$

Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.

Espérances et variances

Exercice 3 [04018] [Correction]
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a\,;b]$.

(a) Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a\,;b]$. La variable X admet aussi une variance σ^2 que l'on se propose de majorer. On introduit la variable aléatoire $Y = X - m$ et les quantités

$$t = \sum_{y\geq 0} yP(Y = y), s = \sum_{y\geq 0} y^2\mathrm{P}(Y = y) \text{ et } u = \mathrm{P}(Y \geq 0).$$

(b) Vérifier

$$t^2 \leq su.$$

(c) Calculer espérance et variance de Y. En déduire

$$t^2 \leq (\sigma^2 - s)(1 - u).$$

(d) En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir

$$t^2 \leq \sigma^2/4.$$

(e) Conclure

$$\sigma^2 \leq (b - a)^2/4.$$

Exercice 4 [04028] [Correction]
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\} \text{ et } \mathrm{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

(a) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale négatives de paramètres n et p.

(b) En déduire espérance et variance d'un loi binomiale négatives de paramètres n et p.

Exercice 5 [04032] [Correction]
On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité 1/2, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
— il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
— s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
— s'il perd, il double sa mise et rejoue.

(a) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.

(b) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

(c) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 6 [04121] [Correction]
Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de « six » obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de « six » obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$.
La variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ correspond alors au nombre de « six » obtenu après n lancers.

(a) Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.

(c) On définit alors la variable aléatoire
$$T = \min\{n \geq 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}.$$
Déterminer la loi de T.

(d) Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci. Calculer cette espérance pour $N = 1$ et $N = 2$.

Exercice 7 [04124] [Correction]
Dans une urne figurent N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). Dans celle-ci on opère des tirages successifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de k boules consécutives identiques ($k \geq 2$). On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.

(a) Déterminer $\mathrm{P}(T = k)$ et $\mathrm{P}(T = k + 1)$.

(b) Soit $n \geq 1$, établir
$$\mathrm{P}(T = n + k) = \frac{N-1}{N^k}\mathrm{P}(T > n).$$

(c) En déduire que la variable T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 8 [04130] [Correction]
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$ et l'on étudie la première apparition de deux succès consécutifs dans cette suite.

(a) Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe $n \geq 2$ vérifiant
$$X_n = X_{n-1} = 1.$$

(b) On note T la variable aléatoire donnée par
$$T = \min\{n \geq 2 \mid X_n = X_{n-1} = 1\} \cup \{+\infty\}.$$
Calculer $\mathrm{P}(T = 2)$, $\mathrm{P}(T = 3)$ et exprimer, pour $n \geq 4$, $\mathrm{P}(T = n)$ en fonction de $\mathrm{P}(T = n - 1)$ et $\mathrm{P}(T = n - 2)$.

(c) Justifier que T admet une espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 9 [04019] [Correction]
On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois « face » et une fois « pile ».

(a) Montrer qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.

(b) On note X le nombre de lancers avant que le jeu cesse.
Montrer que X admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 10 [04184] [Correction]
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques vérifiant
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(E_n) < +\infty.$$
Pour X un ensemble quelconque, on note 1_X la fonction indicatrice de X.

(a) Soit $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{E_n}$ (on convient $Z = +\infty$ si la série diverge).
Prouvez que Z est une variable aléatoire discrète.

(b) Soit
$$F = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \omega \text{ n'appartient qu'à un nombre fini de } E_n\right\}.$$
Prouver que F est un événement et que $\mathrm{P}(F) = 1$.

(c) Prouver que Z admet une espérance.

Exercice 11 [04182] [Correction]
On s'intéresse à la première apparition du motif « PF » dans un tirage infini de pile ou face, indépendants et non truqués. On note A_i l'événement

« Le motif PF apparaît pour la première fois au rang i ».

(c'est-à-dire que le P est en position $i-1$ et le F en position i). On pose $q_i = \mathrm{P}(A_i)$ et T la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du motif.

(a) Écrire un programme **Python** calculant la moyenne d'apparition du motif. Conjecture ?

(b) Montrer que
$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{i\geq 2} A_i\Big) = 1.$$

(c) Décrire A_n, pour $n \geq 2$ et en déduire la valeur de q_n.

(d) Montrer que T est d'espérance finie et calculer son espérance.

On s'intéresse maintenant à la première apparition du motif « PP ». On note toujours T la variable aléatoire donnant le rang de première apparition du motif et $q_n = \mathrm{P}(T = n)$, pour $n \geq 2$.

(e) Calculer avec **Python** la moyenne d'apparition du motif. Conjecture ?

(f) Montrer que $q_2 = 1/4$, $q_3 = 1/8$ et
$$\forall n \geq 4, q_n = \frac{q_{n-1}}{2} + \frac{q_{n-2}}{4}.$$

(g) Montrer que T est d'espérance finie et calculer son espérance.

Exercice 12 [04949] [Correction]
Pour un entier $n \geq 2$, on donne une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi d'espérance μ. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance de $\chi_M(\lambda)$.

Covariances

Exercice 13 [04086] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant chacune une variance. On suppose $\mathrm{V}(X) > 0$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant la quantité
$$\mathrm{E}\Big(\big(Y - (aX + b)\big)^2\Big).$$

Exercice 14 [04048] [Correction]
Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Le bruit est modélisé par une variable B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$.
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S *i.e.* tel que l'espérance $\mathrm{E}\big((Y - S)^2\big)$ soit minimale.

Exercice 15 [04047] [Correction]
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles. On appelle matrice de covariance de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ la matrice
$$\Sigma = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1\leq i,j\leq n}.$$

(a) Soit $X = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
Exprimer la variance de X en fonction de la matrice Σ.

(b) En déduire que les valeurs propres de la matrice Σ sont toutes positives.

Exercice 16 [04181] [Correction]
Soit (U, V) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

(a) Montrer que la somme de n variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0\,;1[$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) On pose $S = (U-1)^2 + (V-1)^2$. Déterminer la loi de S.

(c) On pose $T = (U-1)(V-1) + 1$. Calculer $\mathrm{E}\big(S(T-1)\big)$. Déterminer la loi de T . Calculer la covariance de (S, T). Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 17 [05001] [Correction]
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles suivant toutes les deux la loi d'une variable aléatoire X bornée.
On suppose que $X_1 + X_2$ suit la loi de la variable $2X$. Montrer que $X_1 = X_2$ presque sûrement [1].

Lois usuelles

Exercice 18 [04021] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 19 [04034] [Correction]
Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'évènement $(X = n)$ est-elle maximale ?

(b) Inversement, n étant fixé, pour quelle valeur du paramètre λ, la probabilité de $(X = n)$ est-elle maximale ?

Exercice 20 [04036] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right).$$

Exercice 21 [04045] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair.

Exercice 22 [04115] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p, q \in]0\,;1[$.
Calculer $\mathrm{P}(X < Y)$.

1. Ceci signifie $\mathrm{P}(X_1 = X_2) = 1$.

Exercice 23 [04126] [Correction]
On lance cinq dés. Après ce premier lancer ceux des dés qui ont donné un « As » sont mis de côtés et les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq « As ». On note T la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

(a) Calculer $\mathrm{P}(T \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

(b) En déduire que T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 24 [04127] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et $q > 0$.
Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 [04129] [Correction]
On souhaite modéliser le nombre d'arrivées de « clients » dans un « service » durant un laps de temps T.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s, t \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq s \leq t$, on note $A(n, s, t)$ l'événement

« il arrive n clients dans l'intervalle de temps de $[s\,;t[$ »

On admet l'existence d'un espace probabilisé permettant d'étudier la probabilité de cet événement en supposant :

(H1) pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et tous réels $0 \leq r \leq s \leq t$, les événements $A(m, r, s)$ et $A(n, s, t)$ sont indépendants ;

(H2) la probabilité de l'événement $A(n, s, t)$ ne dépend que de n et du réel $t - s$. On note

$$p_n(t) = \mathrm{P}\big(A(n, 0, t)\big).$$

(H3) la fonction p_0 est continue et $p_0(0) = 1$;

(H4) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1.$$

(H5) on a le développement asymptotique

$$1 - p_0(t) - p_1(t) \underset{t \to 0^+}{=} \mathrm{o}\big(p_1(t)\big).$$

Cette dernière hypothèse signifie que, durant un laps de temps minime, la probabilité d'arrivée d'au moins deux clients est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client.

(a) Justifier que la fonction p_0 est décroissante et que

$$\forall s,t\in\mathbb{R}_+, p_0(s+t)=p_0(s)p_0(t).$$

(b) Montrer que p_0 est à valeurs strictement positives et qu'il existe un réel $\lambda\geq 0$ vérifiant

$$\forall t\in\mathbb{R}_+, p_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

(c) Justifier

$$p_1(t)\underset{t\to0^+}{=}\lambda t+\mathrm{o}(t)\quad\text{et}\quad\forall n\geq 2, p_n(t)\underset{t\to0^+}{=}\mathrm{o}(t).$$

(d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer

$$\forall s,t\geq 0, p_n(s+t)=\sum_{k=0}^{n}p_k(s)p_{n-k}(t).$$

En déduire que la fonction p_n est dérivable et

$$\forall t\geq 0, p_n'(t)=\lambda(p_{n-1}(t)-p_n(t)).$$

(e) Obtenir l'expression de $p_n(t)$ (on pourra étudier $q_n(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}p_n(t)$).

(f) On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de « clients » arrivant durant le laps de temps $T>0$. Déterminer la loi de X. Comment interpréter le paramètre λ ?

Loi conjointes, Loi marginales

Exercice 26 [04054] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et que la loi de Y sachant $X=n$ est binomiale de paramètres n et $p\in\,]0\,;1[$.

(a) Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

(b) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 27 [04055] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{a}{j!k!}\text{ avec }a\in\mathbb{R}.$$

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.

(c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 28 [04056] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2, \mathrm{P}(X=j,Y=k)=a\frac{j+k}{2^{j+k}}\text{ avec }a\in\mathbb{R}.$$

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Déterminer les lois marginales X et Y.

(c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

(d) Calculer $\mathrm{P}(X=Y)$.

Exercice 29 [04057] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p\in\,]0\,;1[$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathrm{P}(X=k,Y=n)=\begin{cases}\binom{n}{k}a^np(1-p)^n & \text{si } k\leq n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\text{ avec }a\in\mathbb{R}.$$

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Déterminer la loi marginale de Y.

(c) Sachant

$$\forall x\in\,]-1\,;1[, \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Reconnaître la loi de X

(d) Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

Exercice 30 [05003] [Correction]
On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p\in\,]0\,;1[$ de tomber côté Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple, les successions de lancers PPFFFP... et FFPPPF... correspondent à $X=2$ et $Y=3$.

(a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

(b) Calculer les espérances de X et Y et comparer celles-ci.

Exercice 31 [05004] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune des lois géométriques de paramètres p et $q \in]0\,;1[$. On pose

$$U = \min(X, Y) \quad \text{et} \quad V = \max(X, Y) - \min(X, Y)(ou|X - Y|??)$$

Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 32 [05006] [Correction]
Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0\,;1[$. Soient N une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes et X, Y les variables déterminées par

$$X = \sum_{i=1}^{N} U_i \quad \text{et} \quad Y = N - \sum_{i=1}^{N} U_i.$$

(a) Vérifier

$$\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{P}(N = k + \ell) \quad \text{pour tout } (k, \ell) \in \mathbb{N}^2.$$

(b) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Inversement, on suppose que les variables X et Y sont indépendantes et que la variable N n'est pas presque sûrement nulle. On pose

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) \quad \text{et} \quad q_\ell = \mathrm{P}(Y = \ell) \quad \text{pour tous } k, \ell \in \mathbb{N}.$$

(a) Justifier que les p_k et les q_ℓ sont tous strictement positifs.

(b) Vérifier que

$$(k + 1)p_{k+1}q_\ell(1 - p) = (\ell + 1)p_k q_{\ell+1} p \quad \text{pour tous } k, \ell \in \mathbb{N}.$$

(c) En déduire une relation de récurrence sur les termes de la suite (p_k) puis identifier la loi suivie par X.

(d) En déduire que N suit une loi de Poisson.

Fonctions génératrices

Exercice 33 [04027] [Correction]
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1 - p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

(a) Reconnaître la loi de T_1.

(b) Déterminer la loi de T_m dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.

(c) Exprimer le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-t)^m}.$$

(d) Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance.

Exercice 34 [04039] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Calculer
$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$

(b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 35 [04040] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

(a) Calculer
$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$

(b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 36 [04024] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Rappeler la fonction génératrice de la variable X.

(b) Exploiter celle-ci pour calculer le moment centré d'ordre 3 de la variable X.

Exercice 37 [04091] [Correction]
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m.$$

(a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

(b) Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geq 2$.

(c) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m

Exercice 38 [04114] [Correction]
Une urne contient 4 boules rapportant $0, 1, 1, 2$ points. On y effectue n tirages avec remise et l'on note S le score total obtenu.
Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire la loi de S.

Exercice 39 [04117] [Correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par

$$\mathrm{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k \text{ (avec } a > 0 \text{ et } p \in \left]0\,;1\right[).$$

Calculer espérance et variance de X.

Exercice 40 [04194] [Correction]
Montrer par les fonctions génératrices qu'il est impossible de « truquer » deux dés cubiques et indépendants pour que la somme d'un lancer suive une loi uniforme sur $[\![2\,;12]\!]$

Exercice 41 [04169] [Correction]
Un pion se déplace sur des cases numérotées par les entiers naturels. Initialement, il se trouve sur la case 0 et à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positif de cases. On note Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues lors de la i-ème étape. On suppose que les Y_i sont indépendantes et suivent la même loi. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

qui donne la position du pion à l'instant n,

$$f_i = \mathrm{P}(Y_1 = i) \quad \text{et} \quad f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i.$$

Enfin, on introduit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) On suppose que $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$.
Écrire en **Python** une fonction qui prend un paramètre entier k et qui renvoie 1 si le pion atteint la case k et 0 sinon.
Écrire une fonction qui, sur une trentaine d'essais, renvoie la proportion de fois où le pion atteint la case k. Comparer à $1/\mathrm{E}(Y_1)$.

On note E_k l'événement : « le pion atteint la case k » et $u_k = \mathrm{P}(E_k)$.

(b) Décrire l'événement E_k à l'aide des variable aléatoires S_n.

(c) Calculer $\mathrm{P}\big(E_k \cap \{Y_1 = j\}\big)$ pour $1 \leq j \leq k$.

(d) En déduire

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j.$$

(e) Justifier la définition de

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k \quad \text{pour } t \in [0\,;1]$$

et montrer que $u(t) = \frac{1}{1-f(t)}$.

(f) Calculer u dans le cas où $Y_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$ et en déduire les u_k.

(g) On suppose que Y_1 prend un nombre fini de valeurs et que les entiers k tels que $\mathrm{P}(Y_1 = k) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que (u_k) tend vers $1/\mathrm{E}(Y_1)$.

Exercice 42 [04180] [Correction]
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d suivant la loi de X et N une variable aléatoire indépendante des X_i et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

(a) Soit G_X, G_S et G_N les séries génératrices de X, S et N. Montrer

$$\forall t \in [0\,;1],\ G_S(t) = G_N \circ G_X(t).$$

(b) On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et la calculer.

(c) On suppose que X et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer la variance de S.

On étudie la transmission du nom de famille au cours des générations dans une société patriarcale. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \,]0\,;+\infty[$. On note Z_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, Z_n le nombre de descendants à la n-ième génération. On suppose que $Z_0 = 1$.

(d) Écrire une fonction **Python** renvoyant le nombre de descendants masculins à la n-ième génération.

(e) Fixer λ et n. Calculer une moyenne, sur un grand nombre de mesures, du nombre de descendants masculins. Comparer à $\mathrm{E}(Z_n)$.

Exercice 43 [04943] [Correction]

(a) Donner le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n.$$

(b) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et calculer $S(t)$ pour tout réel t convenable.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie $G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda > 0$.

(c) Déterminer λ puis $\mathrm{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(d) Rappeler les expressions de l'espérance et de la variance à l'aide de la fonction génératrice et en déduire $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Applications

Exercice 44 [04049] [Correction]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{X}$. Pour chaque valeur $x \in \mathcal{X}$, on pose

$$p(x) = \mathrm{P}(X = x).$$

On appelle entropie de la variable X le réel

$$H(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log\bigl(p(x)\bigr)$$

où l'on convient $0\log 0 = 0$.

(a) Vérifier que $H(X)$ est un réel positif. À quelle condition celui-ci est-il nul ?
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

(b) On appelle entropie conjointe de X et Y, l'entropie de la variable $Z = (X, Y)$ simplement notée $H(X, Y)$.
On suppose les variables X et Y indépendantes, vérifier

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y).$$

(c) On appelle entropie de X sachant Y la quantité

$$H(X \mid Y) = H(X, Y) - H(Y).$$

Vérifier

$$H(X \mid Y) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y = y) H(X \mid Y = y)$$

avec

$$H(X \mid Y = y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X = x \,|\, Y = y)\log(\mathrm{P}(X = x \,|\, Y = y)).$$

Indépendance

Exercice 45 [04083] [Correction]

Soient X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$.
À quelle condition les variables aléatoires X et $Y = f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Moments

Exercice 46 [04023] [Correction]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application

$$M_X(t) = \mathrm{E}\bigl(\mathrm{e}^{tX}\bigr).$$

(a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $M_X(t)$.

(b) On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $]-a\,;a[$.
Montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'on a

$$\mathrm{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0).$$

Inégalités de concentration

Exercice 47 [04113] [Correction]
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Exercice 48 [04122] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in [0\,;1]$ et $X_n = S_n/n$
Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n. Justifier

$$\forall \alpha > 0, \mathrm{P}\big(|X_n - x| > \alpha\big) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

(b) On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose $B_n(f)(x) = \mathrm{E}(Y_n)$.
Vérifier que $B_n(f)(x)$ est une fonction polynôme de la variable x.
Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Ceci assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2, |y-x| \leq \alpha \implies \big|f(y) - f(x)\big| \leq \varepsilon.$$

Au surplus, la fonction f étant continue sur un segment, elle y est bornée (théorème de la borne atteinte). Ceci permet d'introduire un réel M vérifiant

$$\forall x \in [0\,;1], \big|f(x)\big| \leq M.$$

(c) Avec les notations ci-dessus, établir

$$\left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$$

et

$$\left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|\leq\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \varepsilon.$$

(d) Conclure qu'à partir d'un certain rang, on a

$$\forall x \in [0\,;1], \big|B_n(f)(x) - f(x)\big| \leq 2\varepsilon.$$

Ce résultat constitue une démonstration « probabiliste » du théorème de Stone-Weierstrass assurant que toute fonction réelle continue sur un segment peut être uniformément approchée par une fonction polynôme.

Exercice 49 [04183] [Correction]

(a) Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$, où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), puis

$$\left(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right) \text{ et } \left(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right).$$

Que remarque-t-on ?

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1\,;1]$. Montrer que

$$\mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}.$$

(c) On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leq 1$ et $\mathrm{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et

$$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big) \leq \operatorname{ch} t \leq \exp(t^2/2).$$

(d) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que, pour tout i, $|X_i| \leq a_i$. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Montrer

$$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer

$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

(e) En choisissant une bonne valeur de t, montrer

$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right).$$

(f) Commenter le résultat observé à la première question.

Exercice 50 [04948] [Correction]
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire centrée prenant ses valeurs dans $[-1\,;1]$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in [-1\,;1]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}.$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$ existe et

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

(c) Soit $r > 0$. Établir

$$\mathrm{P}\big(|X| > r\big) \leq 2\mathrm{e}^{-r^2/2}.$$

Exercice 51 [04087] [Correction]
Soit X une variable aléatoires réelle discrète admettant une variance σ^2 (avec $\sigma > 0$). Montrer

$$\forall \alpha > 0,\ \mathrm{P}\big(|X - \mathrm{E}(X)| < \alpha\sigma\big) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$