Planche n° 13. Espaces euclidiens

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (I)** (adjoint d'un endomorphisme)

Soit $(E, |\ )$ un espace euclidien.
1) Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un vecteur u et un seul tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = u|x$.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrer qu'il existe une application de E dans E, notée f^*, et une seule telle que $\forall(x, y) \in E^2$, $f(x)|y = x|f^*(y)$.
b) Montrer que f^* est linéaire. (f^* s'appelle l'adjoint de l'endomorphisme f).
c) Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*)$.

Exercice n° 2 (*I)** (endomorphisme symétrique positif, défini positif ou matrice symétrique positive, définie positive)

Soit $(E, |\ )$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.
On dit que f est positif si et seulement si $\forall x \in E$, $f(x)|x \geqslant 0$.
On dit que f est défini positif si et seulement si $\forall x \in E$, $f(x)|x \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. Il revient au même de dire que f est défini positif si et seulement si $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $f(x)|x > 0$.

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est positive si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$ (${}^tXAX$ est une matrice carrée de format $(1, 1)$ que l'on identifie à son unique coefficient).
On dit que A est définie positive si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0$. Il revient au même de dire que A est définie positive si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$.

1) Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.
a) Montrer que f est positif si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs.
b) Montrer que f est défini, positif si et seulement si ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.

2) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs.
b) Montrer que A est définie, positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.

Exercice n° 3 (* I)**

Montrer que la matrice de Hilbert $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est définie positive (c'est-à-dire $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXH_nX \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0$).

Exercice n° 4 (*I)**

1) Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^tAA$. Montrer que S est une matrice symétrique positive (voir définition dans le n° 2, 2)).
2) Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?
3) Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S)$.
5) (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive.
Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Exercice n° 5 (** I)**

Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille de p vecteurs de E $(p \geqslant 2)$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obtusangle si et seulement si $\forall(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ $(i < j \Rightarrow x_i|x_j < 0)$. Montrer que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obtusangle alors $p \leqslant n + 1$.

Exercice n° 6 (I)** (Inégalité de Hadamard)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1, ...x_n)$, on a : $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)| \leqslant \|x_1\|...\|x_n\|$. Cas d'égalité ?

Exercice n° 7 (**)

Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n, on a $|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

Exercice n° 8 (***)

Soit A une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

Exercice n° 9 (I)**

On munit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1) Déterminer l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

2) Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Exercice n° 10 (***)

Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n (voir exercice n° 2).
Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.

Exercice n° 11 (**)

Déterminer $\mathrm{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Exercice n° 12 (**)

Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont orthogonalement semblables.

Exercice n° 13 (* I)**

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives (voir exercices n° 2 et n° 5) est à valeurs propres réelles positives.

Exercice n° 14 (* I)**

Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det A + \det B \leqslant \det(A + B)$.

Exercice n° 15 (* I)**

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice n° 16 (I)**

Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{array}\right.$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1) Déterminer les matrices dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.
2) Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Exercice n° 17 (***)

$O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?

