Suites et séries de fonctions

Plan du chapitre

I - Suites de fonctions

1) Convergence simple d'une suite de fonctions

DÉFINITION 1. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f sur D si et seulement si pour chaque x de D, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre $f(x)$.

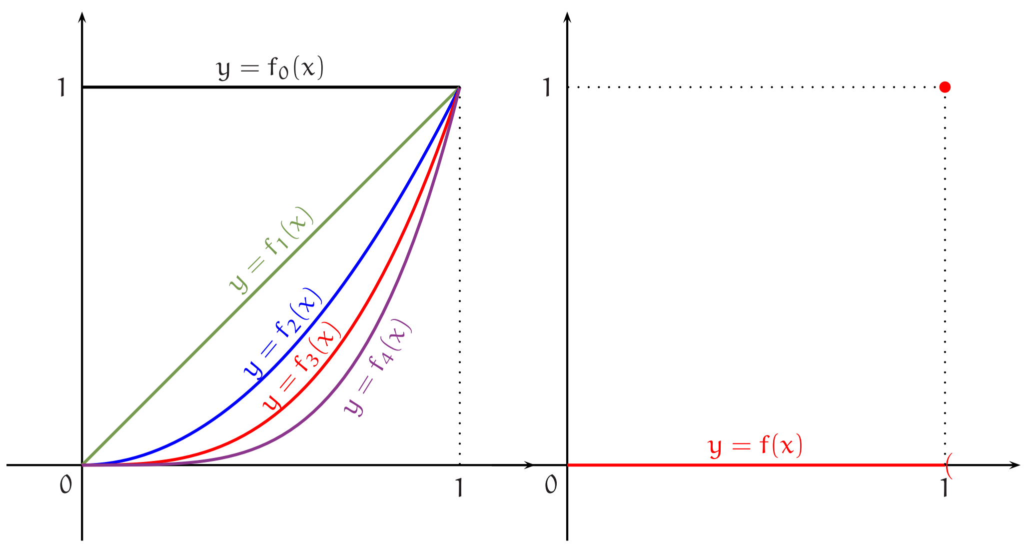
On dit dans ce cas que f est la **limite simple** sur D de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n$.

Si $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 1$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}.$$

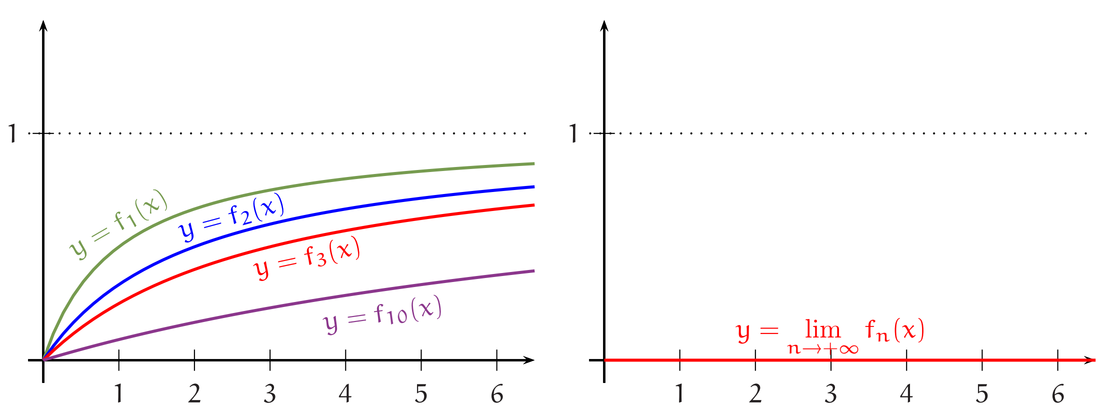
On peut noter que la fonction limite f n'est pas continue en 1.



Exemple 2. Pour $x \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$.

Soit $x \in [0,+\infty[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n+x} = 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle.

On peut noter que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(0) = 0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right) \neq \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$.



TECHNIQUE. Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions, on commence par se donner un réel x du domaine D puis on étudie la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

La rédaction de la solution commence donc par : « Soit $x \in \ldots$ ».

Exercice 1. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$. On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la fonction f_n.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la position relative de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

c) Construire $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$.

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution 1.

1) Soit $x \in [0,1]$.

- Si $x \in]0,1]$, alors $0 \leqslant 1-x < 1$. $((1-x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $q \in [0,1[$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} xn(1-x)^n = 0$.
- Si $x = 0$, pour tout entier n, $f_n(x) = f_n(0) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

En résumé, $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Donc, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout réel x de $[0,1]$,

$$f_n'(x) = n\left[(1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}\right] = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx) = n(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x).$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_n pour $n = 1$ et $n \geqslant 2$:

x	0		$1/2$		1
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

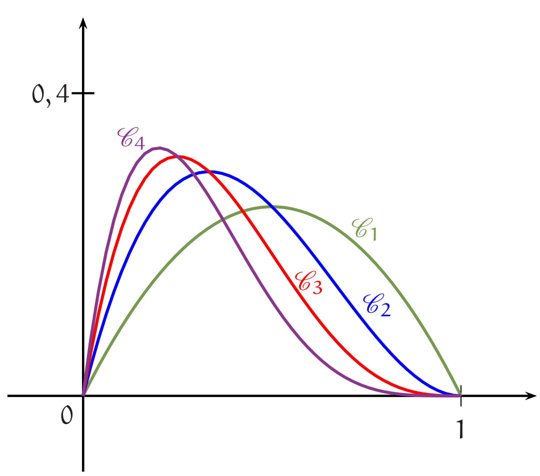
x	0		$1/(n+1)$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(1/(n+1))$	$\searrow$	0

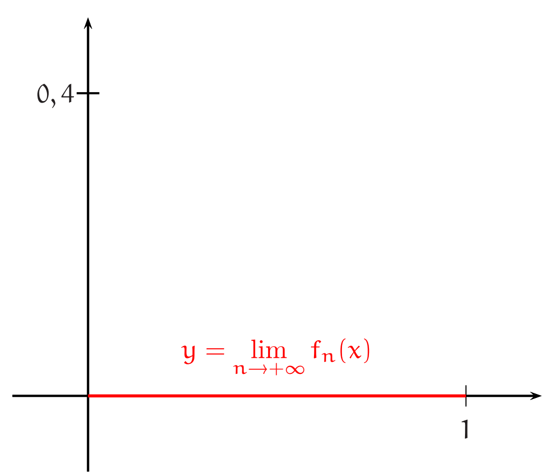
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)x(1-x)^{n+1} - nx(1-x)^n = x(1-x)^n((n+1)(1-x)-n) = x(1-x)^n(1-(n+1)x).$$

L'expression $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{1}{n+1}\right[$, strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{n+1}, 1\right[$ et s'annule en 0, 1 et $\dfrac{1}{n+1}$. Donc, $\mathscr{C}_{n+1}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_n$ sur $\left]0, \dfrac{1}{n+1}\right[$, $\mathscr{C}_{n+1}$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}_n$ sur $\left]\dfrac{1}{n+1}, 1\right[$ et $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$ se coupent aux points $(0,0)$, $(1,0)$ et $\left(\dfrac{1}{n+1}, \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{1/(n+1)}\right)$.

c) Graphes.



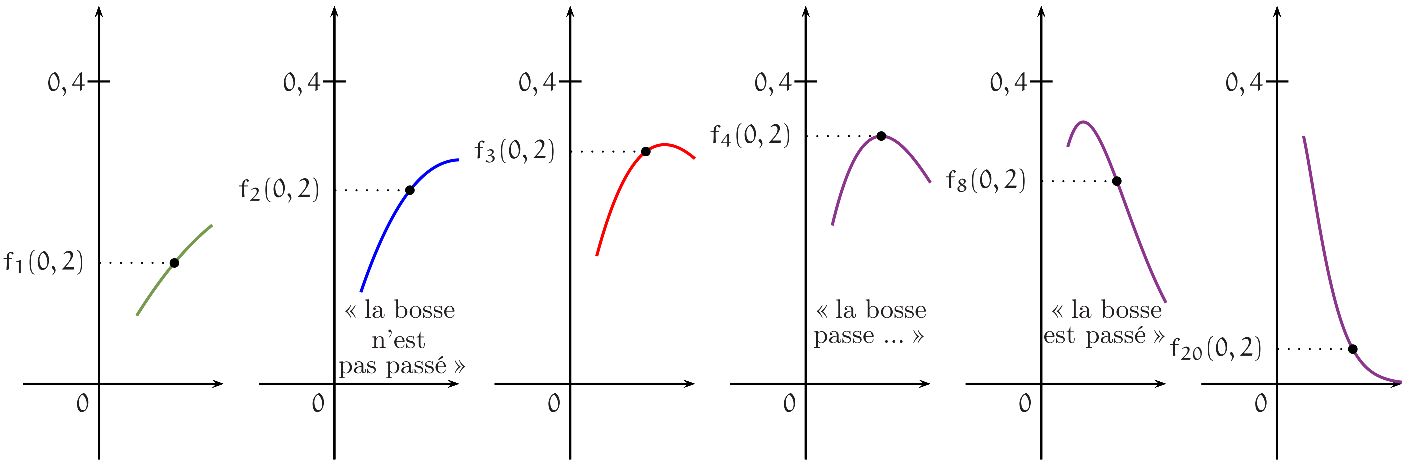


3) Pour $n \geqslant 2$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ puis

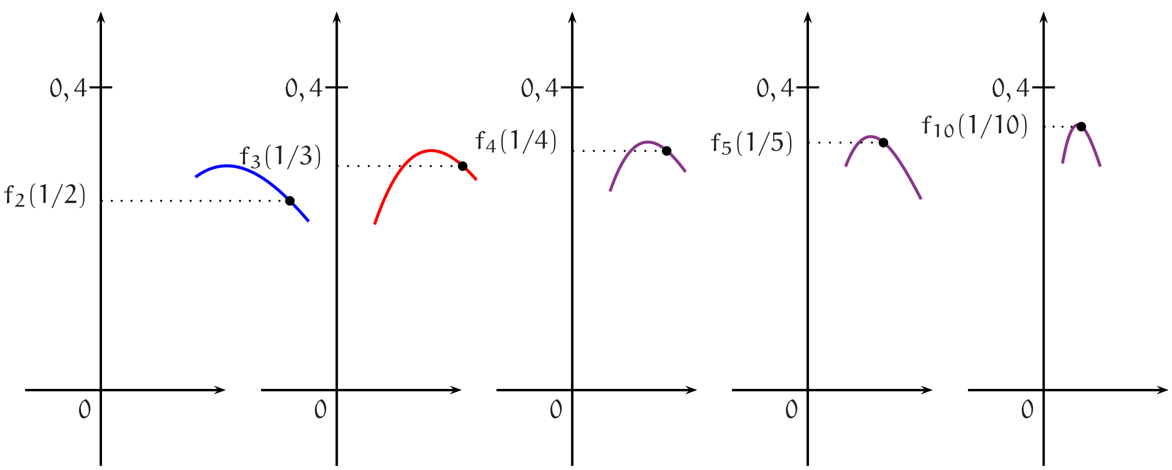
$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-1+o(1)},$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}$.

Commentaire. On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) \neq 0$ alors que pour tout x de $[0,1]$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ ce qui peut choquer. Mais l'expression $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est du type $f_n(x_n)$ et pas du type $f_n(x)$. Il n'y a donc pas de paradoxe.
Pour mieux comprendre, voici l'évolution de la suite $(f_n(0,2))_{n\in\mathbb{N}^*}$



et l'évolution de la suite $\left(f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.



On donne maintenant une définition de la convergence simple « avec des ε ». Cette définition est peu utilisée dans la pratique. Par contre, c'est à partir de cette définition que l'on pourra comprendre la différence entre convergence simple et convergence uniforme, notion exposée au paragraphe suivant.

Définition de la convergence simple « avec des ε ». Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur D si et seulement si

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)\,.$$

2) *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*

2-a) La norme de la convergence uniforme : $\| \ \|_\infty$

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies sur D, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et bornées sur D. Pour $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in D\}$.

Théorème 1. $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. • La fonction nulle sur D est un élément de $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$.
• Soient $(f_1, f_2) \in (\mathscr{B}(D, \mathbb{K}))^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(M_1, M_2) \in [0, +\infty[^2$ tel que $\forall x \in D$, $|f_1(x)| \leqslant M_1$ et $\forall x \in D$, $|f_2(x)| \leqslant M_2$. Pour tout réel x de D,

$$|\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)| \leqslant |\lambda_1|\,|f_1(x)| + |\lambda_2|\,|f_2(x)| \leqslant |\lambda_1|\,M_1 + |\lambda_2|\,M_2.$$

Donc, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est bornée sur D. On a montré que $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^D, +, .)$.

Théorème 2. $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$.

Démonstration. • Soit $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$. $\{|f(x)|,\ x \in D\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. $\{|f(x)|,\ x \in D\}$ admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que $\| \ \|_\infty$ est une bien application de $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$. On a $\sup\{|f(x)|,\ x \in D\} \geqslant 0$ ou encore $\|f\|_\infty \geqslant 0$.

$$\forall f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K}),\ \|f\|_\infty \geqslant 0.$$

• Soit $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ telle que $\|f\|_\infty = 0$. Puisque $\|f\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(x)|,\ x \in D\}$, on en déduit que $\forall x \in D$, $|f(x)| \leqslant 0$ puis que $\forall x \in D$, $f(x) = 0$ et donc que $f = 0$.

$$\forall f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K}),\ \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0.$$

• Soient $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda = 0$, $\|\lambda f\|_\infty = 0 = |\lambda|\|f\|_\infty$. Dorénavant, $\lambda \neq 0$. Pour tout réel x de D,

$$|\lambda f(x)| = |\lambda|\ |f(x)| \leqslant |\lambda|\|f\|_\infty,$$

et donc $|\lambda|\|f\|_\infty$ est un majorant de $\{|\lambda f(x)|,\ x \in D\}$. Puisque $\|\lambda f\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda|\|f\|_\infty$. Puisque $\lambda \neq 0$, on a $\|f\|_\infty = \left\|\dfrac{1}{\lambda}\lambda f\right\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$ et donc, puisque $|\lambda| > 0$, $|\lambda|\|f\|_\infty \leqslant \|\lambda f\|_\infty$. Finalement,

$$\forall f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty.$$

• Soit $(f, g) \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})^2$. Pour tout réel x de D, $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(x)+g(x)|,\ x \in D\}$. Puisque $\|f+g\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

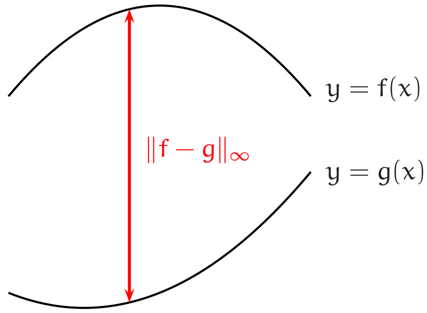
$$\forall (f, g) \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})^2,\ \|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

On a montré que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$.

Commentaire 1. On rappelle qu'un sup n'est pas toujours un max. Par exemple, pour $x \geqslant 0$, posons $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Pour tout réel positif x, $0 \leqslant f(x) < \dfrac{x+1}{x+1} = 1$. Ainsi, 1 est un majorant de $\{|f(x)|,\ x \geqslant 0\}$ et donc, puisque $\|f\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants, on a $\|f\|_\infty \leqslant 1$. D'autre part, $\forall x \geqslant 0$, $\|f\|_\infty \geqslant \dfrac{x}{x+1}$. Quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\|f\|_\infty \geqslant 1$ et finalement $\|f\|_\infty = 1$. Maintenant, il n'existe aucun réel x tel que $|f(x)| = \|f\|_\infty$ car, pour tout réel $x \geqslant 0$, $|f(x)| = f(x) < 1$. La borne supérieure de f n'est donc pas atteinte ou encore f admet sur $[0, +\infty[$ une borne supérieure réelle mais f n'admet pas de maximum.

On peut néanmoins rappeler que si f est une fonction continue sur un segment, alors la fonction $|f|$ est continue sur ce segment et admet donc un maximum sur ce segment. La norme infini d'une fonction f continue sur un segment est toujours atteinte.

Commentaire 2. $\|f-g\|_\infty$ permet de mesurer la distance du graphe de f au graphe de g. Quand le sup est atteint, $\|f-g\|_\infty$ se visualise aisément sur un graphique (si f et g sont à valeurs réelles) : c'est la plus grande distance d'un point de $\mathscr{C}_f$ au point de $\mathscr{C}_g$ de même abscisse.



Commentaire 3. Quand on veut analyser la norme infini d'une fonction f sur plusieurs ensembles D à la fois, la notation $\|f\|_\infty$ devient insuffisante. On fait alors apparaître l'ensemble D en indice : $\|f\|_{\infty,D}$.
Par exemple, si pour tout réel x, $f(x)=x^2$, alors $\|f\|_{\infty,[-1,1]}=1$, $\|f\|_{\infty,[-2,1]}=4$ et $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}}=+\infty$.

2-b) Définition de la convergence uniforme

On rappelle que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur le domaine D si et seulement si

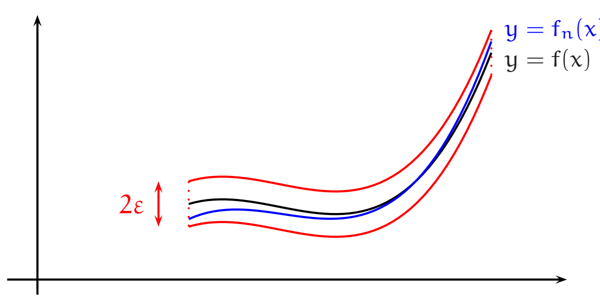
$$\forall x\in D,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant n_0\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon).$$

Dans cette définition, l'ordre des quantificateurs $\forall x\in D,\dots,\exists n_0\in\mathbb{N},\dots$ signifie que le rang n_0 que l'on fournit dépend de x et peut changer quand on change de x. La convergence uniforme va consister à fournir un rang n_0 valable pour tous les x en même temps :

Définition 2. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in D,\ (n\geqslant n_0\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon).$$

Interprétation graphique. Pour $n\geqslant n_0$, le graphe de la fonction f_n est contenu dans une bande de largeur 2ε autour du graphe de f :



Théorème 3. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D si et seulement si il existe un rang n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$, la fonction $f-f_n$ est bornée sur D et $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_\infty=0$.

Démonstration. • Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D.
Soit $\varepsilon>0$. Il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$ et tout x de D, $|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$. Mais alors, pour $n\geqslant n_0$, la fonction $f-f_n$ est bornée sur D et $\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon$.
Ainsi, $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\in\mathbb{N}$, $(n\geqslant n_0\Rightarrow\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_\infty=0$.

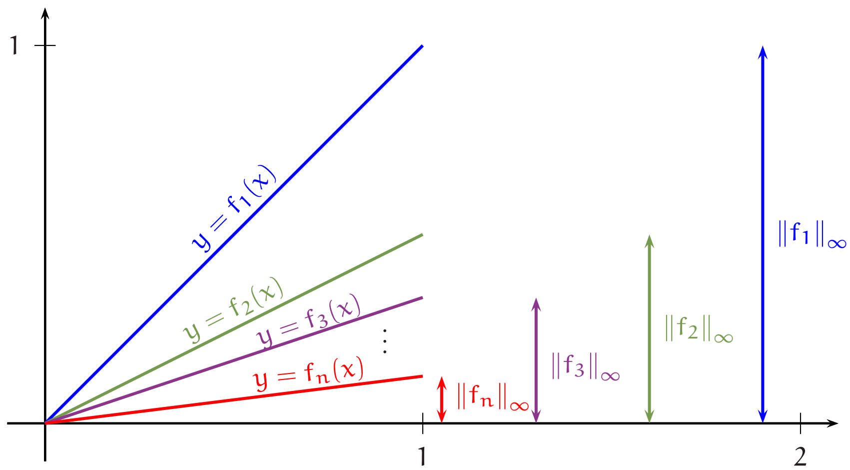
• Supposons qu'il existe un rang n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$, la fonction $f-f_n$ est bornée sur D et $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_\infty=0$.
Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n_1\geqslant n_0$ tel que pour tout $n\geqslant n_1$, $\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon$.
Pour $n\geqslant n_1$ et $x\in D$, on a $|f(x)-f_n(x)|\leqslant\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D$, $(n \geqslant n_1 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon)$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, 1]$.

Technique. Le théorème précédent fournit la démarche utilisée la plupart du temps dans la pratique pour démontrer qu'une convergence est uniforme : on montre que $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 1. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ avec égalité obtenue pour $x = 1$. Donc $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$.
Par suite, chaque f_n, $n \geqslant 1$, est bornée sur $[0, 1]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - 0\|_\infty = 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.



Exemple 2. Pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\{|f_n(x) - 0|,\ x \geqslant 0\} = \left\{\dfrac{x}{n},\ x \geqslant 0\right\}$ est un ensemble de réels non borné et donc $\|f_n\|_\infty = +\infty$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = +\infty$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

Par contre, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$. En effet :
Soit $x \in [0, +\infty[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$. Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le nombre 0 ou encore la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

Il y a un lien entre la convergence simple et la convergence uniforme. La convergence uniforme est un cas particulier de convergence simple. Une convergence simple peut être uniforme ou pas ou encore :

Théorème 4. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur D.

Démonstration. On sait que la phrase logique $\ldots, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ldots, \forall x \in D, \ldots$ implique la phrase logique $\forall x \in D, \ldots, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ldots$ (si on dispose d'un entier n_0 valable pour tous les x, alors pour chaque x, on dispose d'un entier n_0). Donc la convergence uniforme entraine la convergence simple.

Commentaire. La réciproque de ce théorème est fausse. La convergence simple n'entraine pas la convergence uniforme. Une convergence peut être simple mais pas uniforme. Par exemple, la suite de fonctions $f_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n} \end{array}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$ mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$.
1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
2) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0, +\infty[$.

Solution 2.

1) Soit $x \geqslant 0$.
Si $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
Si $x > 0$, la suite géométrique $(e^{-nx})_{n\in\mathbb{N}^*} = \left((e^{-x})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q \in]0, 1[$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0$.
Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons $\|f_n\|_\infty$. La fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = n^\alpha \left(e^{-nx} - nxe^{-nx}\right) = n^\alpha (1 - nx) e^{-nx}.$$

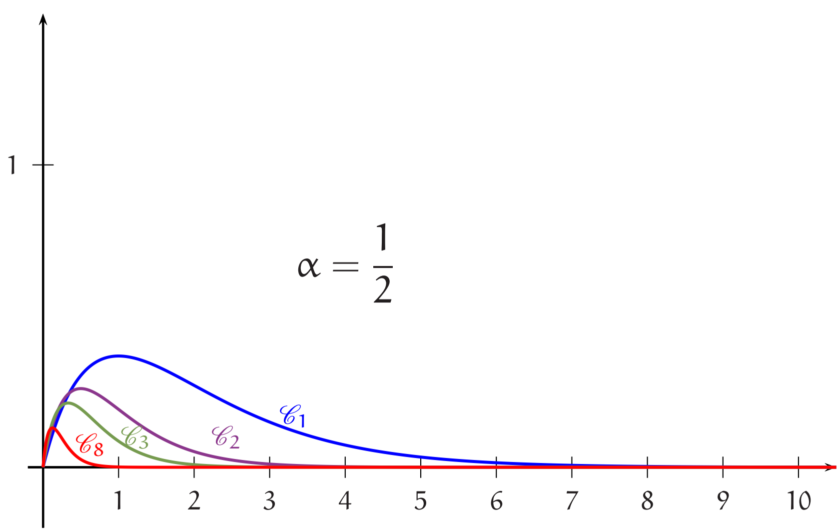
On en déduit le tableau de variations de la fonction f_n.

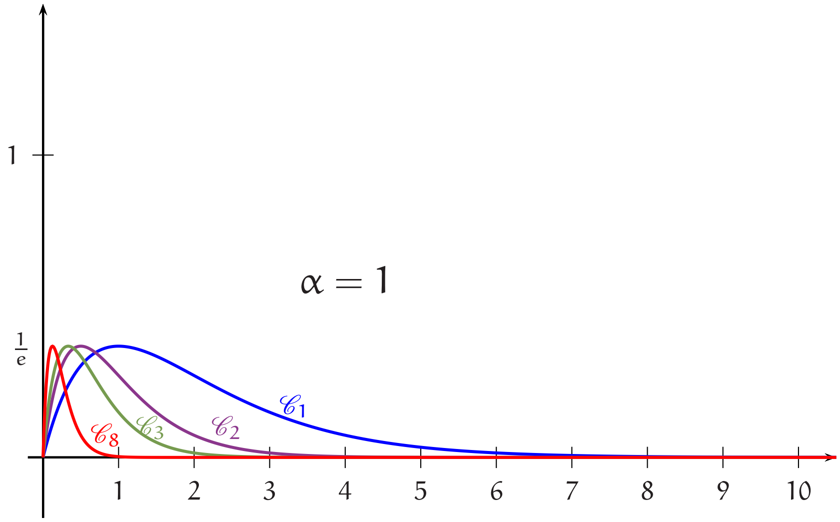
x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$n^{\alpha-1}/e$	$\searrow$	0

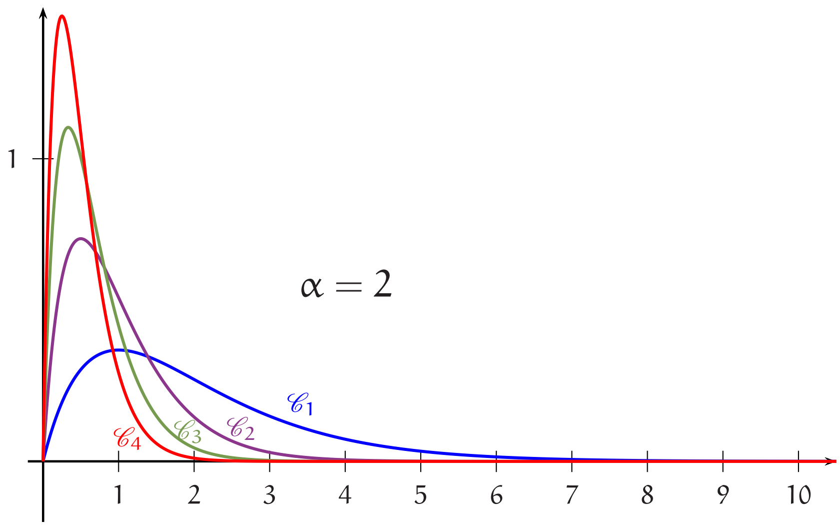
L'étude précédente montre que pour tout entier naturel non nul n, $\|f_n\|_\infty = \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$.

Si $0 < \alpha < 1$, $\|f_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
Si $\alpha \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
On peut même noter que si $\alpha > 1$, $\|f_n\|_\infty$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ bien que pour chaque $x \geqslant 0$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Voici quelques graphes quand $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.







Technique. On a vu que pour étudier la convergence simple, on doit se donner x et étudier la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. La rédaction commence donc par « soit $x \in \ldots$ ».

Pour étudier la convergence uniforme, on doit se donner n et travailler sur la fonction f_n dans le but d'évaluer $\|f_n\|_\infty$. La rédaction commence donc par « soit $n \in \ldots$ ».

Notation. La phrase « la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D » peut se noter $f_n \rightrightarrows f$ sur D.

2-c) Premières propriétés

Théorème 5. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D si et seulement si la suite de fonctions $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur D.

Démonstration. $f_n \rightrightarrows f$ sur D $\Leftrightarrow \|f - f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow f - f_n \rightrightarrows 0$ sur D

Théorème 6. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une certaine fonction f sur D et si la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une certaine fonction g sur D, alors la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\lambda f + \mu g$ sur D.

Démonstration. Il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, la fonction $f - f_n$ est bornée sur D et un entier n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, la fonction $g - g_n$ est bornée sur D. Pour $n \geqslant \text{Max}\{n_0, n_1\}$ et $x \in D$,

$$\begin{aligned}|(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f_n+\mu g_n)(x)| &= |\lambda(f(x)-f_n(x))+\mu(g(x)-g_n(x))| \\ &\leqslant |\lambda|\,|f(x)-f_n(x)|+|\mu|\,|g(x)-g_n(x)| \\ &\leqslant |\lambda|\,\|f-f_n\|_\infty+|\mu|\,\|g-g_n\|_\infty,\end{aligned}$$

et donc, pour $n \geqslant \text{Max}\{n_0, n_1\}$, $\|(\lambda f+\mu g)-(\lambda f_n+\mu g_n)\|_\infty \leqslant |\lambda|\,\|f-f_n\|_\infty+|\mu|\,\|g-g_n\|_\infty$. Pour $n \geqslant \text{Max}\{n_0, n_1\}$, la fonction $(\lambda f+\mu g)-(\lambda f_n+\mu g_n)$ est bornée sur D et de plus, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_\infty = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\|g-g_n\|_\infty = 0$, on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\|(\lambda f+\mu g)-(\lambda f_n+\mu g_n)\|_\infty = 0$.

Ceci montre que la suite de fonctions $(\lambda f_n+\mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\lambda f+\mu g$ sur D.

Théorème 7. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit D' une partie non vide de D.
Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une certaine fonction f sur D, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D'.

Démonstration. Si n_0 est un rang à partir duquel la fonction $f-f_n$ est bornée sur D, alors pour $n \geqslant n_0$, la fonction $f-f_n$ est bornée sur D'. De plus, pour $n \geqslant n_0$, $\|f-f_n\|_{\infty,D}$ est un majorant de $\{|f(x)-f_n(x)|\ x\in D\}$ et en particulier $\|f-f_n\|_{\infty,D}$ est un majorant de $\{|f(x)-f_n(x)|\ x\in D'\}$. On en déduit que pour $n \geqslant n_0$, $\|f-f_n\|_{\infty,D'} \leqslant \|f-f_n\|_{\infty,D}$. Puisque $\|f-f_n\|_{\infty,D}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\|f-f_n\|_{\infty,D'}$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D'.

Théorème 8. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D telle $f_n(x_n)$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur D.
Si il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D telle $(f-f_n)(x_n)$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur D.

Démonstration. Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D.
Soit n_0 un rang à partir duquel la fonction $f-f_n$ est bornée sur D. Pour $n \geqslant n_0$, on a $|(f-f_n)(x_n)| \leqslant \|f-f_n\|_\infty$. Puisque $\|f-f_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $(f-f_n)(x_n)$.

Ainsi, si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, la suite $((f-f_n)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Par contraposition, s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que la suite $((f-f_n)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur D.

Exercice 3.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Solution 3.

Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$. Quand n tend vers $+\infty$. $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{-1+o(1)}$ et donc $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers $\dfrac{1}{e} \neq 0$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Commentaire. Le phénomène de « bosse roulante » fournit une situation usuelle de convergence simple qui n'est pas uniforme. Retournez voir les graphiques en bas de la page 3 (graphes de $x \mapsto nx(1-x)^n$) ou page 9 (graphes de $x \mapsto nxe^{-nx}$ (cas $\alpha = 2$)).

Donnons maintenant un exercice qui est un grand classique des classes préparatoires et fournit une suite de fonctions convergeant uniformément vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n[\\ 0 \text{ si } x \in [n, +\infty[\end{cases}$. On note que f_n est continue en n.

1) Construire les graphes de f_1, f_2, f_3 et f_4.

2) Vérifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on pose $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$.

a) Montrer que la fonction g_n est positive sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Dans les questions c) et d), on prend $n \geqslant 2$.

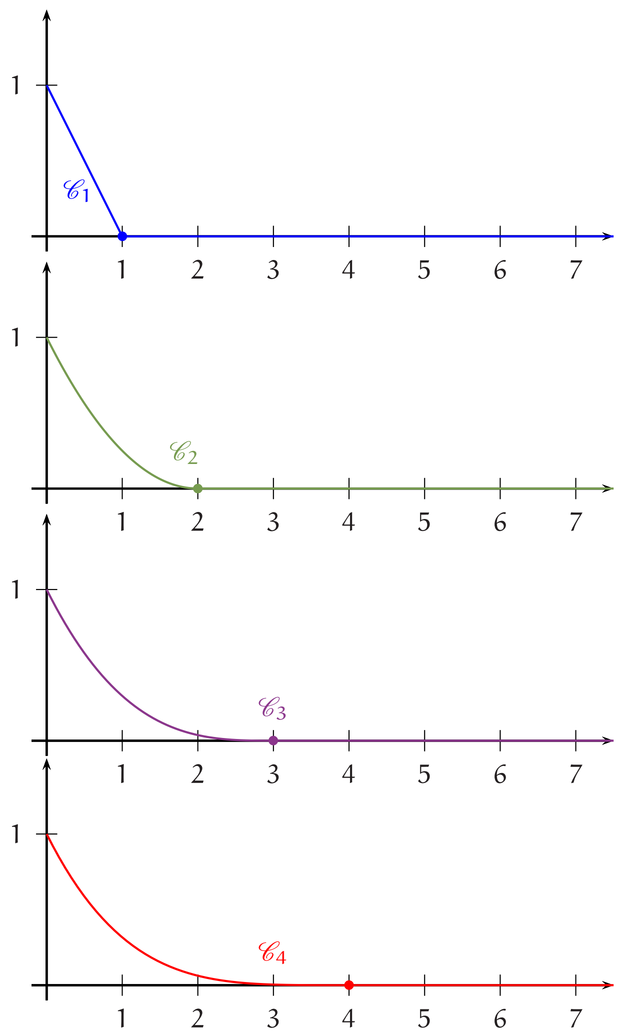
c) Montrer que la fonction g_n admet sur $[0, +\infty[$ un maximum atteint en un certain réel x_n de $]0, n[$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x de $[0, +\infty[$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \dfrac{1}{ne}$.

e) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

Solution 4.

1) Graphes de f_1, f_2, f_3 et f_4.

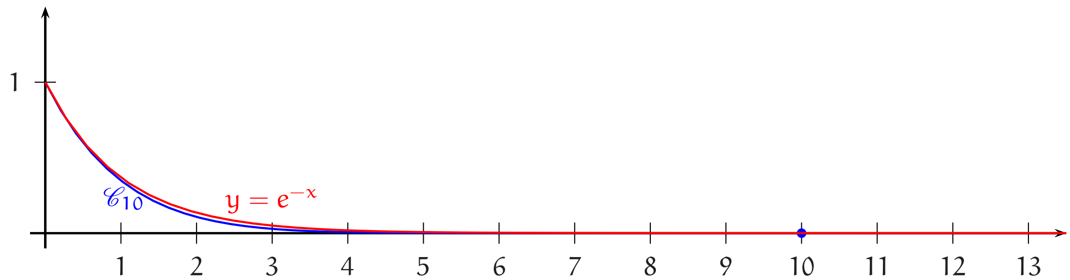


2) Soit $x \geqslant 0$. Dés que $n > x$ de sorte que $x \in [0, n[$ et $1 - \dfrac{x}{n} > 0$, $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$ puis

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(-\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x+o(1)},$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers la fonction } f\ :\ x \mapsto e^{-x} \text{ sur } [0,+\infty[.}}$$



3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déjà, pour $x \geqslant n$, $g_n(x) = e^{-x} \geqslant 0$.
Soit $x \in [0,n[$. Pour tout réel u, $1+u \leqslant e^u$ (inégalité de convexité classique). Donc, $1-\dfrac{x}{n} \leqslant e^{-\frac{x}{n}}$. Mais de plus $x \in [0,n[$ et donc $1-\dfrac{x}{n} \geqslant 0$. On en déduit que $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n = e^{-x}$ (par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,+\infty[$) puis que $f_n(x) \leqslant f(x)$ et finalement que $g_n(x) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } g_n \text{ est positive sur } [0,+\infty[.}}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. Pour tout réel x de $[n,+\infty[$, $g_n(x) = e^{-x}$. Donc, g_n est de classe C^1 sur $[n,+\infty[$ et en particulier dérivable à droite en n, de dérivée à droite égale à $-e^{-n}$.
Pour tout réel x de $[0,n]$, $g_n(x) = e^{-x} - \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$. Donc, g_n est de classe C^1 sur $[0,n]$ et en particulier dérivable à gauche en n, de dérivée à droite égale à $-e^{-n} + \left(1-\dfrac{0}{n}\right)^{n-1} = e^{-n}$ (car $n-1>0$).
La fonction g_n est dérivable à droite et à gauche en n et ses dérivées à droites et à gauche en n sont égales. Donc, la fonction g_n est dérivable en n et $g_n'(n) = e^{-n}$. De plus, la fonction g_n' est continue à droite et à gauche en n et donc la fonction g_n' est continue en n. Finalement, la fonction g_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée est continue sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2, \text{ la fonction } g_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}}$$

c) Soit $n \geqslant 2$. Sur $[n,+\infty[$, g_n est positive et admet un maximum égal à e^{-n}. D'autre part, la fonction g_n est continue sur le segment $[0,n]$. Donc, la fonction g_n admet sur $[0,n]$ un maximum atteint en un certain x_n de $[0,n]$. On en déduit que la fonction g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$ et que

$$\underset{[0,+\infty[}{\text{Max}}\, g_n = \text{Max}\{g_n(x_n), e^{-n}\}.$$

Puisque $g_n'(n) = -e^{-n} < 0$ et que g_n' est continue sur $[0,n]$, la fonction g_n' est strictement négative au voisinage de n à droite puis la fonction g_n est strictement décroissante au voisinage de n à droite. Ceci montre que $g_n(x_n) > e^{-n}$ et en particulier que $x_n < n$ et que $\underset{[0,+\infty[}{\text{Max}}\, g_n = g_n(x_n)$. Enfin, puisque $g_n(0) = 0 < e^{-n} < g_n(x_n)$, on a $x_n > 0$.

On a montré que la fonction g_n admet sur $[0,+\infty[$ un maximum atteint en un certain réel x_n de $]0,n[$.

d) Soit $n \geqslant 2$. D'après ce qui précède, pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n.$$

La fonction g_n est dérivable sur l'intervalle **ouvert** $]0,n[$ et admet un maximum en $x_n \in]0,n[$. On sait alors que la dérivée de g_n s'annule nécessairement en x_n ce qui fournit $-e^{-x_n} + \left(1-\dfrac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0$ ou encore $\left(1-\dfrac{x_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-x_n}$. On en déduit que

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} \times \left(1-\frac{x_n}{n}\right) = e^{-x_n} - e^{-x_n}\left(1-\frac{x_n}{n}\right) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

Ainsi, pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(x_n) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

Pour $u \geqslant 0$, posons $h(u) = ue^{-u}$. La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $u \geqslant 0$,

$$h'(u) = e^{-u} - ue^{-u} = (1-u)e^{-u}.$$

La fonction h est donc croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que

$$x_n e^{-x_n} = h(x_n) \leqslant h(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

et finalement que $0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(x_n) = \dfrac{x_n e^{-x_n}}{n} \leqslant \dfrac{1}{ne}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{ne}.}$$

e) Soit $n \geqslant 2$, D'après la question précédente, pour tout x de $[0, +\infty[$, $0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{ne}$ puis $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{ne}$. On en déduit que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{ne}$. Ainsi, la fonction $f - f_n$ est bornée sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \geqslant 2$ et de plus $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers la fonction } f\ :\ x \mapsto e^{-x} \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

L'exercice précédent nous permet de dégager une technique d'étude de la convergence uniforme.

Technique. On veut montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur D.

On majore l'expression $|f(x) - f_n(x)|$ par une expression **indépendante de** x (mais dépendante de n) et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit un majorant de $\|f - f_n\|_\infty$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2-d) Convergence localement uniforme

Etudions d'abord un exemple. On reprend la suite de fonctions de l'exercice n° 1, page 3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

On rappelle que

- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ et donc sur $]0, 1]$;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, 1]$ car $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \dfrac{1}{e} \neq 0$.

Soit $a \in]0, 1]$. Analysons la convergence uniforme sur $[a, 1]$. Soit $n \geqslant \dfrac{1}{a}$ de sorte que $a \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. On a vu dans l'exercice n° 1 page 3, que la fonction f_n est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{n+1}, 1\right]$. En particulier, pour tout x de $[a, 1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$ et donc

$$\forall n \geqslant \frac{1}{a},\ \|f_n\|_\infty \leqslant f_n(a).$$

Puisque $f_n(a)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\|f_n\|_\infty$. Ceci montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, 1]$.

Ainsi, dans cette situation, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, 1]$ pour tout a de $]0, 1]$ mais la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, 1]$. Donc,

La phrase « $\forall a \in]0, 1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, 1]$ » **n'entraine pas** la phrase « la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $]0, 1]$.

Définition 3. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge localement uniformément** vers la fonction f sur D si et seulement si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers la fonction f **sur tout segment de** D.

Immédiatement, on a

Théorème 9. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers la fonction f sur D **sur tout segment de** D.

La réciproque est fausse. La convergence localement uniforme n'entraine pas la convergence uniforme comme le montre l'exemple du début de ce paragraphe.

3) Théorèmes d'approximation

3-a) Le théorème d'approximation de Weierstrass

Exercice 5. (Polynômes de Bernstein)

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x\in[0,1],\ B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

$B_n(f)$ est le n-ème polynôme de Bernstein associé à f sur $[0,1]$.

1) Calculer $B_n(f)$ quand
- **a)** pour tout x de $[0,1]$, $f(x)=1$;
- **b)** pour tout x de $[0,1]$, $f(x)=x$;
- **c)** pour tout x de $[0,1]$, $f(x)=x(x-1)$.

2) a) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x)$.

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4}$.

3) On fixe un réel $\varepsilon>0$.
- **a)** Montrer qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, si $|x-y|\leqslant\alpha$, alors $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
- **b)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, $|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.

  (On séparera les cas où $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha$ des cas où $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|>\alpha$).
- **c)** Montrer que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0,1]$

Solution 5.

1) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)=1$, alors pour tout x de $[0,1]$, d'après la formule du binôme de Newton,

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+(1-x))^n=1.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1.}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)=x$, alors pour tout x de $[0,1]$,

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Pour $k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k}=\dfrac{k}{n}\times\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=\dbinom{n-1}{k-1}$ et donc

$$\begin{aligned}B_n(f)(x)&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}x^{l+1}(1-x)^{n-(l+1)}\\&=x\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}x^l(1-x)^{n-1-l}=x.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x(x-1)$. Déjà, pour tout x de $[0,1]$, $B_1(f)(x) = 0$. Dorénavant, $n \geqslant 2$.

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = -\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $k(n-k)\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} = n(n-1)\dfrac{(n-2)!}{(k-1)!(n-2-(k-1))!} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-1}$ et donc

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= -\frac{n(n-1)}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}\sum_{l=0}^{n-2}\binom{n-1}{l}x^{l+1}(1-x)^{n-(l+1)} \\ &= -\frac{n-1}{n}x(1-x)\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-2}{l}x^l(1-x)^{n-2-l} = -\frac{n-1}{n}x(1-x), \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}x(1-x).}$$

2) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - 2nx\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= n^2x^2 - 2n^2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + n^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= n^2x^2 - 2n^2x \times x + n^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + n^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= -n^2x^2 + n^2\left(-\frac{n-1}{n}x(1-x)\right) + n^2x = -n^2x^2 - n(n-1)x(1-x) + n^2x = nx - nx^2 \\ &= nx(1-x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x).}$$

b) Pour $x \in [0,1]$, $x(1-x) = -x^2 + x = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x de $[0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4}.$$

3) a) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. α est ainsi dorénavant fixé.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. Posons $A = \left\{k \in [\![0,n]\!] / \ \left|\dfrac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha\right\}$. Puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$,

$$
\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Déjà, $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$,

$$|B_n(f)(x)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc est bornée sur ce segment. Par suite, pour tout $k\in[\![0,n]\!]\setminus A$, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty < +\infty$. Ensuite,

$$k\in[\![0,n]\!]\setminus A \Rightarrow \left|\frac{k}{n}-x\right| > \alpha \Rightarrow \frac{|k-nx|}{n} \geqslant \alpha \Rightarrow \frac{(k-nx)^2}{n^2\alpha^2} \geqslant 1.$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &\leqslant 2\|f\|_\infty \sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leqslant 2\|f\|_\infty \sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus A}\frac{(k-nx)^2}{n^2\alpha^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n^2\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{2\|f\|_\infty}{n^2\alpha^2}\times nx(1-x) \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n^2\alpha^2}\times\frac{n}{4}\ \text{(d'après 2)b))} \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.
\end{aligned}
$$

On a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ |B_n(f)(x)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

c) $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $n\geqslant n_0$ et tout $x\in[0,1]$, on a

$$|B_n(f)(x)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ (n\geqslant n_0 \Rightarrow |B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon)$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite des polynômes } (B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers la fonction } f \text{ sur } [0,1].}$$

Théorème 10. (Théorème d'approximation de WEIERSTRASS)
Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il existe une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers la fonction f sur le segment $[a,b]$ (toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes).

Démonstration. L'exercice précédent démontre le théorème de WEIERSTRASS dans le cas du segment $[0,1]$.
Soient $[a,b]$ $(a<b)$ un segment quelconque de $\mathbb{R}$ puis f une fonction continue sur $[a,b]$. La fonction affine $x \mapsto (b-a)x+a$ est une bijection de $[0,1]$ sur $[a,b]$ de réciproque la fonction affine $x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}$.

Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = f((b-a)x+a)$ (de sorte que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$). La fonction affine $x \mapsto (b-a)x+a$ est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$ et la fonction f est continue sur $[a,b]$. Donc la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$.

Il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers la fonction g sur le segment $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, posons $P_n(x) = Q_n\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$. Chaque P_n est effectivement un polynôme. De plus,

$$\{|f(x)-P_n(x)|,\ x\in[a,b]\} = \left\{\left|g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|,\ x\in[a,b]\right\} = \{|g(y)-Q_n(y)|,\ y\in[0,1]\},$$

car x décrit $[a,b]$ si et seulement $y = \dfrac{x-a}{b-a}$ décrit $[0,1]$. On en déduit que pour tout entier naturel n, $\|f-P_n\|_{\infty,[a,b]} = \|g-Q_n\|_{\infty,[0,1]}$. Puisque $\|g-Q_n\|_{\infty,[0,1]}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\|f-P_n\|_{\infty,[a,b]}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de polynômes convergeant uniformément vers la fonction f sur le segment $[a,b]$.

On peut maintenant se demander si le théorème de WEIERSTRASS reste vrai quand on passe d'un segment $[a,b]$ à $\mathbb{R}$ tout entier. Par exemple, on sait depuis la maths sup que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Il revient au même de dire que la suite de fonctions polynômes $P_n\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction $f\ :\ x\mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$. Cette convergence est-elle uniforme ? La réponse est non. En effet, d'après un théorème de croissances comparées, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) = +\infty$ et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|f-P_n\|_\infty = +\infty.$$

Plus généralement :

Exercice 6.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une certaine fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Solution 6.
(Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$,) il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-P_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour tout entier $n\geqslant n_0$ et tout réel x, $|P_n(x)-P_{n_0}(x)| \leqslant |P_n(x)-f(x)| + |f(x)-P_{n_0}(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = 1$.

Ainsi, pour $n\geqslant n_0$, la fonction polynôme $P_n - P_{n_0}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour $n \geqslant n_0$, la fonction polynôme $P_n - P_{n_0}$ est constante sur $\mathbb{R}$. Donc,

$$\forall n\geqslant n_0,\ \exists c_n\in\mathbb{K}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ P_n(x)-P_{n_0}(x) = c_n \quad (*).$$

Pour tout $n\geqslant n_0$, on a $c_n = P_n(0)-P_{n_0}(0)$. Cette dernière expression tend vers $f(0)-P_{n_0}(0)$ quand n tend vers $+\infty$ et donc la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Posons $c = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n$. Quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = P_{n_0}(x) + c.$$

Ceci montre que f est un polynôme.

3-b) Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par une fonction en escalier

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f est donc uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ (|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$. α est ainsi dorénavant fixé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction en escalier f_n par :

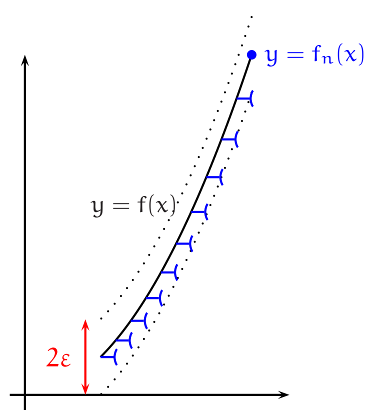
$$\forall x \in [a, b],\ f_n(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \text{ si } x \in \left[a + k\dfrac{b-a}{n}, a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}\right[,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ f(b) \text{ si } x = b \end{cases}.$$

On va montrer que la suite de fonctions en escaliers $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[a, b]$.

Soit $n_0 = E\left(\dfrac{b-a}{\alpha}\right) + 1 \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $n_0 \geqslant \dfrac{b-a}{\alpha}$ puis $\dfrac{b-a}{n_0} \leqslant \alpha$. Soient $n \geqslant n_0$ et $x \in [a, b]$.
Si $x = b$, $|f(x) - f_n(x)| = |f(b) - f(b)| = 0 \leqslant \varepsilon$.
Si $x \in [a, b[$, il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $a + k\dfrac{b-a}{n} \leqslant x < a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}$. Dans ce cas, $|f(x) - f_n(x)| = \left|f(x) - f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ avec

$$\left|x - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \left|\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right) - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| = \frac{b-a}{n} \leqslant \frac{b-a}{n_0} \leqslant \alpha.$$

Mais alors, dans ce cas aussi, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.



On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon)$ et donc que la suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[a, b]$. En particulier, on a montré que :

> **Théorème 11.** Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier sur ce segment.

4) Propriétés qui « passent ou ne passent pas » par convergence simple

4-a) Celles qui « passent ».

Très peu de propriétés « passent à la limite simple ». Ce sont les propriétés liées au symbole $\leqslant$ à savoir le sens de variation et la convexité (pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$).

> **Théorème 12.** Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f.
> Si chaque fonction f_n est une fonction croissante sur I, alors f est une fonction croissante sur I.
> Si chaque fonction f_n est une fonction décroissante sur I, alors f est une fonction décroissante sur I.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et croissantes sur I. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f.

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$. Pour tout entier naturel n, $f_n(a) \leqslant f_n(b)$ et donc, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(a) \leqslant f(b)$.

On a montré que $\forall (a, b) \in I^2$, $(a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$ et donc que f est croissante sur I.

Si toutes les fonctions f_n sont décroissantes sur I, toutes les fonctions $-f_n$ sont croissantes sur I et la suite de fonctions $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $-f$. Donc la fonction $-f$ est croissante sur I puis la fonction f est décroissante sur I.

Théorème 13. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f.
Si chaque fonction f_n est une fonction convexe sur I, alors f est une fonction convexe sur I.
Si chaque fonction f_n est une fonction concave sur I, alors f est une fonction concave sur I.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et convexes sur I. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f.

Soient $(a,b)\in I^2$ et $\lambda\in[0,1]$. Pour tout entier naturel n, $f_n((1-\lambda)a+\lambda b)\leqslant(1-\lambda)f_n(a)+\lambda f_n(b)$ et donc, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f((1-\lambda)a+\lambda b)\leqslant(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$.

On a montré que $\forall(a,b)\in I^2,\ \forall\lambda\in[0,1],\ f_((1-\lambda)a+\lambda b)\leqslant(1-\lambda)f_(a)+\lambda f_(b)$ et donc que f est convexe sur I.

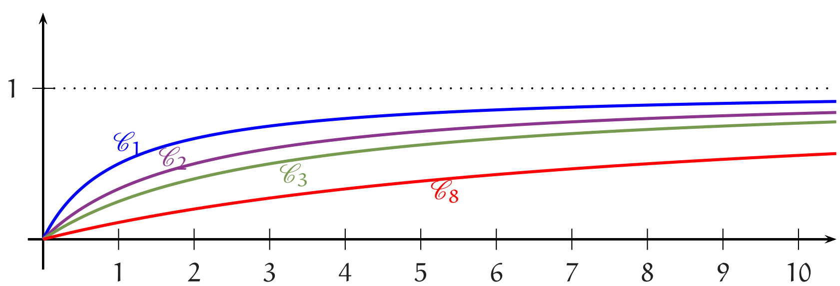
Si toutes les fonctions f_n sont concaves sur I, toutes les fonctions $-f_n$ sont convexes sur I et la suite de fonctions $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $-f$. Donc la fonction $-f$ est convexe sur I puis la fonction f est concave sur I.

4-b) Celles qui « ne passent pas ».

i) Les limites

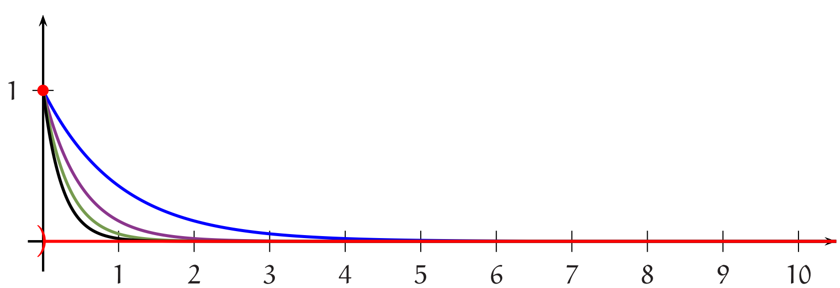
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,+\infty[$, posons $f_n(x)=\dfrac{x}{x+n}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}(0)=0$ (la limite en $+\infty$ de la fonction limite qui est la fonction nulle est 0).
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to+\infty}(1)=1$ (pourtant chaque fonction f_n a pour limite 1 en $+\infty$). Donc, il est possible que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}f_n(x)\right)\neq\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right).$$



ii) La continuité

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,+\infty[$, posons $f_n(x)=e^{-nx}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x=0\\ 0 \text{ si } x>0\end{cases}$. Chaque fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ mais la fonction limite f ne l'est pas. Donc, il est possible qu'une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction non continue. On verra plus loin que la fonction limite est nécessairement continue quand la convergence est uniforme.



iii) La dérivabilité

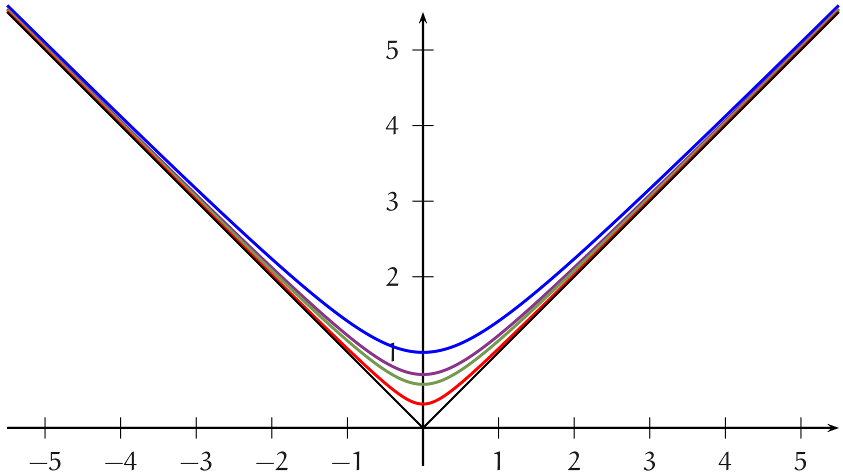
On va donner ici une suite de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ convergeant non seulement simplement mais uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction non dérivable.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, posons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la suite de fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. La fonction limite f n'est pas dérivable en 0.

Vérifions que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x,

$$|f(x) - f_n(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leqslant \frac{1/n}{\sqrt{0^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{0^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

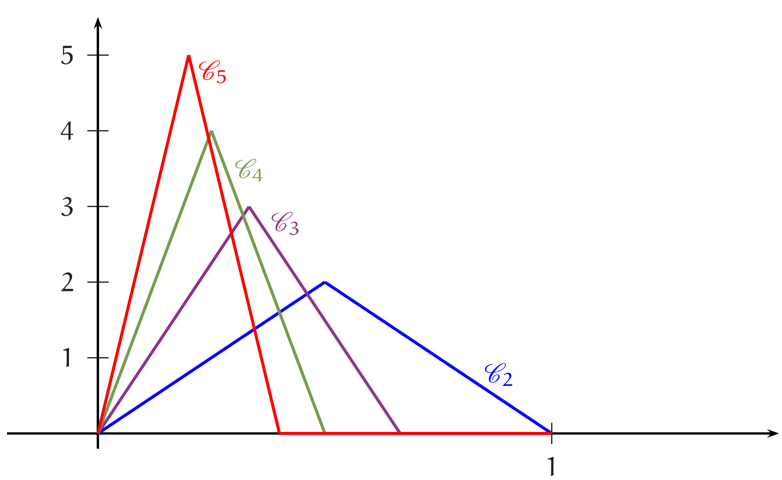
et donc $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On en déduit que $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Il est donc possible qu'une suite de fonctions dérivables converge uniformément vers une fonction f non dérivable.



iv) L'intégrale

On va construire une suite de fonctions f_n convergeant simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle et telle que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

Pour $n \geqslant 2$ et $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ -n^2\left(x - \dfrac{2}{n}\right) \text{ si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left[\dfrac{2}{n}, 1\right]. \end{cases}$. f_n est la fonction continue sur $[0, 1]$, affine par morceaux sur $[0, 1]$, nulle sur $\left[\dfrac{2}{n}, 1\right]$ et telle que $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$ et $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = 0$.



Soit $n \geqslant 2$. $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ est l'aire d'un triangle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur n. Donc $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{\frac{2}{n}\times n}{2} = 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) = 1.$$

Vérifions alors que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Déjà pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $f_n(0) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Soit alors $x \in]0,1]$. Dès que $n \geqslant \frac{2}{x}$, on a $x \geqslant \frac{2}{n}$ et donc $f_n(x) = 0$. Ainsi, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geqslant 2}$ est nulle à partir d'un certain rang et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

On a montré que pour tout x de $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Mais alors,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \neq 1.$$

Donc, il est possible que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

5) *Les grands théorèmes*

5-a) Le théorème d'interversion des limites.

Théorème 14. (théorème d'interversion des limites)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit a un réel adhérent au domaine D.

On suppose que :
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n a une limite $\ell_n \in \mathbb{K}$ quand x tend vers a.

Alors,
- la suite numérique $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$;
- la fonction f a une limite $\ell \in \mathbb{K}$ quand x tend vers a ;
- $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$ ou encore, plus explicitement,

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Commentaire. Le théorème précédent reste valable quand a est $+\infty$ ou $-\infty$ ou quand les ℓ_n sont dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$ (quand les fonctions f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$) auquel cas la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. On démontre le théorème dans le cas où a est réel et les ℓ_n sont dans $\mathbb{K}$.

• Montrons que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Puisque la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in D$ et tout $n \geqslant n_0$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour tout $n \geqslant n_0$ et tout x de D, on a alors

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$ et tout x de D, on a $|f_n(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant 1$. Quand x tend vers a, on obtient pour tout $n \geqslant n_0$, $|\ell_n - \ell_{n_0}| \leqslant 1$ et donc pour $n \geqslant n_0$,

$$|\ell_n| = |\ell_{n_0} + \ell_n - \ell_{n_0}| \leqslant |\ell_{n_0}| + |\ell_n - \ell_{n_0}| \leqslant |\ell_{n_0}| + 1$$

puis, pour tout entier naturel n,

$$|\ell_n| \leqslant \mathrm{Max}\{|\ell_0|, |\ell_1|, \ldots, |\ell_{n_0-1}|, 1 + |\ell_{n_0}|\}.$$

Ceci montre que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

• La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels (ou de complexes) qui est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(\ell_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_{\varphi(n)}$.

• Montrons que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout x de D, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Puisque la suite $\left(\ell_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\ell_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Soit $N = \mathrm{Max}\{n_0, n_1\}$. On sait que $\varphi(N) \geqslant N$ et donc $\varphi(N) \geqslant n_0$ puis, pour tout x de D, $\left|f(x) - f_{\varphi(N)}(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. D'autre part, $N \geqslant n_1$ et donc $\left|\ell_{\varphi(N)} - \ell\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. On en déduit que pour tout x de D,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \left|f(x) - f_{\varphi(N)}(x)\right| + \left|f_{\varphi(N)}(x) - \ell_{\varphi(N)}\right| + \left|\ell_{\varphi(N)} - \ell\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \left|f_{\varphi(N)}(x) - \ell_{\varphi(N)}\right|.$$

Maintenant, $f_{\varphi(N)}(x)$ tend vers $\ell_{\varphi(N)}$ quand x tend vers a. Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout x de D, si $|x - a| \leqslant \alpha$ alors $\left|f_{\varphi(n)}(x) - \ell_{\varphi(N)}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. Pour $x \in D$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$ et donc que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

• Montrons que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout x de D, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

D'autre part, puisque $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in D \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, on a

$$|\ell_n - \ell| \leqslant |\ell_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - \ell| \leqslant |\ell_n - f_n(x)| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Soit alors $n \geqslant n_0$. Puisque $f_n(x)$ tend vers ℓ_n quand x tend vers a, on peut trouver $x_0 \in D \cap [a - \alpha, a + \alpha]$ tel que $|\ell_n - f_n(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. D'après ce qui précède,

$$|\ell_n - \ell| \leqslant |\ell_n - f_n(x_0)| + \frac{2\varepsilon}{3} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |\ell_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$.

Les égalités $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ s'écrivent encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$.

5-b) Continuité de la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 15. (limite uniforme d'une suite de fonctions continues)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n est continue sur D.

Alors, la fonction f est continue sur D.

Démonstration. Soit $x_0 \in D$. Soit $D' = D \setminus \{x_0\}$. On note g_n (resp. g) la restriction de f_n (resp. f) à D'.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D et donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur D'.

Chaque fonction f_n est continue en x_0 et donc chaque fonction g_n a une limite quand x tend vers x_0, à savoir $\ell_n = f_n(x_0)$. De plus, la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $f(x_0)$.

D'après le théorème d'interversion des limites, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existe dans $\mathbb{K}$ et

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{n\to+\infty} g_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n = f(x_0).$$

Ceci montre que f est continue en x_0. Puisque f est continue en tout x_0 de D, f est continue sur D.

5-c) Dérivabilité et dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 16.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n est dérivable sur D ;
- la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction g.

Alors,
- la fonction f est continue sur D ;
- $f'=g$ ou encore, plus explicitement

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'=\lim_{n\to+\infty} f'_n.$$

Démonstration. • Soit $x_0\in D$. Pour $x\in D$, on pose $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ si } x\in D\setminus\{x_0\}\\ g(x_0) \text{ si } x=x_0\end{cases}$. Montrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0)=g(x_0)$ équivaut à montrer que la fonction φ est continue en x_0. Pour cela, on va montrer que la fonction φ est continue sur D.

• Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in D$, on pose $\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} \text{ si } x\in D\setminus\{x_0\}\\ f'_n(x_0) \text{ si } x=x_0\end{cases}$. Chaque fonction f_n est dérivable sur D et en particulier continue sur D. Chaque fonction φ_n est continue sur $D\setminus\{x_0\}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $D\setminus\{x_0\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $D\setminus\{x_0\}$. D'autre part, chaque fonction φ_n est continue en x_0 car la fonction f_n correspondante est dérivable en x_0. Finalement, chaque fonction φ_n est continue sur D.

• De plus, pour chaque x de D, $\varphi_n(x)$ tend vers $\varphi(x)$ (que l'on ait $x\neq x_0$ ou $x=x_0$) ou encore, la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers la fonction φ.

• On va maintenant montrer que la suite fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction φ sur D. Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ et $x\in D$.
Si $x\neq x_0$, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|\varphi_n(x)-\varphi_p(x)|=\left|\frac{(f_n-f_p)(x)-(f_n-f_p)(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant\left\|f'_n-f'_p\right\|_\infty$$

(cette inégalité étant valable même si la fonction $f'_n-f'_p$ n'est pas bornée sur D auquel cas $\left\|f'_n-f'_p\right\|_\infty=+\infty$). L'inégalité ci-dessus reste vraie quand $x=x_0$ car $|\varphi_n(x_0)-\varphi_p(x_0)|=\left|f'_n(x_0)-f'_p(x_0)\right|$. Finalement

$$\forall x\in D,\ \forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ |\varphi_n(x)-\varphi_p(x)|\leqslant\left\|f'_n-f'_p\right\|_\infty\quad(*).$$

• Soit $\varepsilon>0$. Puisque la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction g sur D, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$ et $x\in D$, $|f'_n(x)-g(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geqslant n_0$, $p\geqslant n_0$ et $x\in D$, on a

$$\left|f'_n(x)-f'_p(x)\right|\leqslant|f'_n(x)-g(x)|+\left|g(x)-f'_p(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n\geqslant n_0$, $p\geqslant n_0$ et $x\in D$, on a $\left|f'_n(x)-f'_p(x)\right|\leqslant\varepsilon$ et on en déduit que pour tout $n\geqslant n_0$ et $p\geqslant n_0$, on a $\left\|f'_n-f'_p\right\|_\infty\leqslant\varepsilon$. D'après $(*)$, on en déduit encore que

$$\forall x\in D,\ \forall n\geqslant n_0,\ \forall p\geqslant n_0,\ |\varphi_n(x)-\varphi_p(x)|\leqslant\varepsilon.$$

L'entier n supérieur ou égal à n_0 et le réel $x\in D$ étant fixés, on fait tendre p vers $+\infty$ et on obtient

$$\forall x\in D,\ \forall n\geqslant n_0,\ |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon.$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in D,\ (n\geqslant n_0\Rightarrow|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon)$ et donc que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction φ sur D.

La fonction φ est continue sur D en tant que limite uniforme sur D d'une suite de fonctions continues sur D. En particulier, la fonction φ est continue en x_0 ou encore la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = g(x_0)$.

5-d) Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 17.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f.

Alors,
- la fonction f est continue sur $[a, b]$;
- la suite numérique $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\ dx\right) = \int_a^b f(x)\ dx$ ou encore, plus explicitement

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\ dx\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx.$$

Démonstration. On sait déjà que f est continue sur $[a, b]$ en tant que limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ existe.

Puisque la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f, la suite $(\|f - f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang n_0 et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f_n(x)\ dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\ dx \leqslant (b - a)\|f - f_n\|_\infty.$$

Puisque $(b-a)\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f_n(x)\ dx\right|$. Ceci montre que la suite numérique $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

II - Séries de fonctions

1) Les quatre types de convergence

• Convergence simple d'une série de fonctions.

Définition 4. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La série de fonctions de terme général f_n **converge simplement** vers la fonction f sur D si et seulement si pour chaque x de D, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge vers le nombre $f(x)$.

On dit dans ce cas que f est la **somme** sur D de la série de fonctions de terme général f_n et on écrit

$$\forall x \in D,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + x > 0$ et en particulier $n + x \neq 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ existe. D'autre part, $\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{n+x}$, tend vers 0 en décroissant. Donc, la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Puisque pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement (vers sa somme) sur $]0, +\infty[$.

• **Convergence absolue d'une série de fonctions**

Définition 5. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La série de fonctions de terme général f_n **converge absolument** sur D si et seulement si pour chaque x de D, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument.

Théorème 18.

Si la série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D, alors la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D.

Démonstration. Supposons que la série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D. Alors, pour tout x de D, la série de terme général $f_n(x)$ converge absolument et en particulier converge. Mais alors, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D.

Commentaire. La réciproque est fausse. Une série de fonctions peut converger simplement sans être absolument convergente.

Exemple 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+x}\right| = \dfrac{1}{n+x}$. Comme $\dfrac{1}{n+x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$ et que la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, on en déduit que la série numérique de terme général $f_n(x)$ n'est pas absolument convergente. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n ne converge pas absolument sur $]0, +\infty[$ (mais converge simplement sur $]0, +\infty[$).

Exemple 2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}$.

Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}\right| = \dfrac{1}{(n+x)^2}$. Comme $\dfrac{1}{(n+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2} > 0$ et que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur $]0, +\infty[$ et en particulier converge simplement sur $]0, +\infty[$.

• **Convergence uniforme d'une série de fonctions**

Définition 6. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La série de fonctions de terme général f_n **converge uniformément** vers la fonction f sur D si et seulement si la suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D.

Théorème 19.

Si la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D, alors la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D.

Démonstration. Supposons que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D vers une certaine fonction f. Il revient au même de dire que la suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D. En particulier, la suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur D ou encore la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D.

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. On sait déjà que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$ sur $]0, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x > 0$, la suite $\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$\forall x > 0,\ |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{x+n+1}\right| = \frac{1}{x+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\|R_n\|_\infty = \left\|f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right\|_\infty$. Ceci montre que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction f.

Commentaire 1. Pour $x > 0$ fixé, la série numérique de terme général $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+x}\right| = \dfrac{1}{n+x}$ diverge. Par suite, la série de fonctions de terme général f_n n'est pas absolument convergente sur $]0,+\infty[$. Ceci montre que la convergence uniforme n'entraine pas la convergence absolue.

Commentaire 2. Dans l'exemple, on a mis en œuvre une technique qui est de portée générale pour démontrer que la convergence d'une série de fonctions est uniforme :

TECHNIQUE. Pour démontrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n sur D, on majore $|R_n(x)|$, $x \in D$, par une expression **indépendante de** x, dépendant de n et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

De manière générale,

Théorème 20.

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D (vers la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$) si et seulement si la suite des restes des restes à l'ordre n $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang sur D et converge uniformément sur D vers la fonction nulle.

• Convergence normale d'une série de fonctions

DÉFINITION 7. Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La série de fonctions de terme général f_n **converge normalement** sur D si et seulement si toutes les fonctions f_n sont bornées sur D et la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.

Exemple 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

avec égalité effectivement obtenue pour $x = 0$. Ceci montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, il en est de même de la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$. Ceci montre que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[0,+\infty[$.

Exemple 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, posons $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+n)^3}$. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(x+n)^3} \leqslant \frac{x+n}{(x+n)^3} = \frac{1}{(x+n)^2} \leqslant \frac{1}{(0+n)^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Ceci montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est bornée sur $[0,+\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, il en est de même de la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$. Ceci montre que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[0, +\infty[$.

Dans l'exemple 2, on a mis en œuvre une technique de portée générale pour démontrer qu'une série de fonctions converge normalement :

Technique. Pour démontrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n sur D, on majore $|f_n(x)|$, $x \in D$, par une expression **indépendante de** x, dépendant de n et terme général d'une série numérique convergente.

Théorème 21.

Si la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur D, alors la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D.

Démonstration. Par hypothèse, chaque fonction f_n est bornée sur D et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout x de D,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty.$$

$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ est le reste à l'ordre n d'une série numérique convergente et on sait que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en est de même de $\|R_n\|_\infty$. On a montré que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers la fonction f sur D.

Commentaire. La réciproque est fausse. Pour s'en convaincre, reprenons l'exemple de la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, $n \in \mathbb{N}$. On sait que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{x+n}$. Si $n = 0$, pour tout $x > 0$, $|f_0(x)| = \dfrac{1}{x}$ et donc $\|f_0\|_\infty = +\infty$. Ceci montre déjà que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas normalement convergente sur $]0, +\infty[$ bien qu'uniformément convergente sur $]0, +\infty[$.

On peut noter que pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty \geqslant |f_n(x)| = \dfrac{1}{x+n}$ pour tout $x > 0$ et donc $\|f_n\|_\infty \geqslant \dfrac{1}{n}$ (obtenu en faisant tendre x vers 0). Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge, on en déduit que la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, n'est pas davantage normalement convergente sur $]0, +\infty[$ bien qu'uniformément convergente sur $]0, +\infty[$.

En résumé, on a les implications suivantes, toute implication non écrite étant fausse.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{C.U.} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{C.N.} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{C.S.} \\
 & \text{C.A.} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

2) Les grands théorèmes

2-a) Le théorème d'interversion des limites pour les séries de fonctions

Théorème 22. (le théorème d'interversion des limites)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit a un réel adhérent à D.

On suppose que :
- la série de fonctions de terme général f_n $n\in\mathbb{N}$, converge uniformément sur D vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n a une limite $\ell_n\in\mathbb{K}$ quand x tend vers a.

Alors,
- la série numérique de terme général ℓ_n, $n\in\mathbb{N}$, converge dans $\mathbb{K}$;
- la fonction f a une limite $\ell\in\mathbb{K}$ quand x tend vers a ;
- $\ell=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\ell_n$ ou encore, plus explicitement,

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a}f_n(x)\right).$$

Démonstration. La suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D et chaque fonction f_n a une limite dans $\mathbb{K}$ à savoir $L_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ell_k$ quand x tend vers a.
D'après le théorème d'interversion des limites pour les suites de fonctions (théorème 14, page 21), on en déduit que f a une limite ℓ dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou encore que la série de terme général ℓ_n, $n\in\mathbb{N}$, converge et que

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}L_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\ell_n.$$

Commentaire. Comme pour les suites de fonctions, ce théorème est encore valable si $a=\pm\infty$.

Exemple. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$, posons $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+n}$. On a vu (pages 25 et 26) que la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$. De plus, chaque fonction f_n a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ à savoir 0.
D'après le théorème d'interversion des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}\right)=0$.

De même, la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$. De plus, $\forall k\geqslant1$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(-1)^k}{x+k}=\frac{(-1)^k}{k}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln(2)$.
Puisque d'autre part, pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$.

2-b) Continuité de la somme d'une série de fonctions

Théorème 23. (limite uniforme d'une suite de fonctions continues)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :
- la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$ converge uniformément sur D vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n est continue sur D.

Alors, la fonction f est continue sur D.

Démonstration. On applique le théorème correspondant pour les suites de fonctions à la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1. On a vu que la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k}$. De plus, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Donc, f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

Exemple 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

• Pour chaque $x > 0$, $\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{n^x}$, tend vers 0 en décroissant. Donc, pour chaque $x > 0$, la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^x}$.

• La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ne converge pas uniformément vers f sur $]0,+\infty[$. En effet, dans le cas contraire, puisque chaque fonction f_n a une limite réelle quand x tend vers 0, à savoir $\ell_n = (-1)^n$, le théorème d'interversion des limites affirme que la série numérique de terme général ℓ_n converge ce qui n'est pas.

• Soit $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout x de $[a,+\infty[$, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^x}\right| = \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Puisque $a > 0$, on en déduit que $\|R_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$.

• Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n est continue sur $[a,+\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$. Donc f est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est continue sur $]0,+\infty[$. Vérifions le explicitement.

Soit $x_0 > 0$. f est continue sur $\left[\dfrac{x_0}{2},+\infty\right[$. Puisque $0 < \dfrac{x_0}{2} < x_0$, f est en particulier continue en x_0. Puisque f est continue en tout réel $x_0 > 0$, f est continue sur $]0,+\infty[$.

Commentaire. Dans l'exemple 2, on est face à une situation type. La convergence uniforme « ne passe pas » à $]0,+\infty[$ mais la continuité oui :

$$\left(\forall a > 0,\ \sum f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,+\infty[\right) \nRightarrow \left(\sum f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur }]0,+\infty[\right)$$

mais

$$(\forall a > 0,\ f \text{ continue sur } [a,+\infty[) \Rightarrow (f \text{ continue sur }]0,+\infty[)\,.$$

2-c) Le théorème de dérivation terme à terme

Théorème 24. (le théorème de dérivation terme à terme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :
- la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement sur D vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n est dérivable sur D ;
- la série de fonctions de terme général f'_n, $n\in\mathbb{N}$, converge uniformément sur D vers une certaine fonction g ;

Alors, la fonction f est dérivable sur D et $f'=g$. Plus explicitement, la dérivée de f s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

Démonstration. On applique le théorème correspondant pour les suites de fonctions à la suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1. Pour $n\geqslant 1$ et $x>0$, on pose $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+n}$. La série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, converge simplement vers la fonction $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$.

Chaque fonction f_n, $n\geqslant 1$, est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$, $f'_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$, $|f'_n(x)|=\dfrac{1}{(x+n)^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$ et donc $\|f'_n\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{n^2}$. On en déduit que la série de fonctions de terme général f'_n, $n\geqslant 1$, converge normalement et en particulier uniformément sur $]0,+\infty[$.

En résumé,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, converge simplement vers f sur $]0,+\infty[$;
- chaque fonction f_n, $n\geqslant 1$, est dérivable sur $]0,+\infty[$;
- la série de fonctions de terme général f'_n, $n\geqslant 1$, converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme ou encore

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

Exemple 2. Pour $n\geqslant 0$ et $x>0$, on pose $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+n}$. La série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction $g\ :\ x\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$. Pour tout $x>0$, $g(x)=\dfrac{1}{x}+f(x)$ et donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$,

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

On peut noter que la série de fonctions de terme général f'_n, $n\in\mathbb{N}$, n'est pas normalement convergente sur $]0,+\infty[$ car $\|f_0\|_\infty=+\infty$. On peut aussi noter que néanmoins la dérivée de g s'obtient par dérivation terme à terme.

Corollaire 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :
- la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement sur D vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur D ;
- la série de fonctions de terme général f'_n, $n\in\mathbb{N}$, converge uniformément sur D vers une certaine fonction g ;

Alors, la fonction f est de classe C^1 sur D et $f'=g$. Plus explicitement, la dérivée de f s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

Corollaire 2. (généralisation du théorème de dérivation terme à terme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :
- la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement sur D vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n est de classe C^p, $p\in\mathbb{N}^*$, (resp. C^∞) sur D ;
- pour tout $k\in[\![1,p]\!]$ (resp. $k\in\mathbb{N}^*$), la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$, $n\in\mathbb{N}$, converge uniformément sur D vers une certaine fonction g_k ;

Alors, la fonction f est de classe C^p (resp. C^∞) sur D et $\forall k\in[\![1,p]\!]$ (resp. $\forall k\in\mathbb{N}^*$), $f^{(k)}=g_k$. Plus explicitement, les dérivées successives de f s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Commentaire. On appliquera ce dernier théorème dans l'étude de la fonction ζ de Riemann qui est l'objet de la dernière section de ce chapitre.

2-d) Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment

Théorème 25. (le théorème d'intégration terme à terme sur un segment)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un **segment** $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :
- la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f ;
- chaque fonction f_n est continue sur $[a,b]$.

Alors,
- la fonction f est continue sur $[a,b]$;
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, converge ;
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ s'obtient par intégration terme à terme :

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Démonstration. On applique le théorème correspondant pour les suites de fonctions à la suite de fonctions $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple. On sait que pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, posons $f_n(x)=x^n$. Pour $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty=\dfrac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/2} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},$$

avec $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,dx = [-\ln(1-x)]_0^{1/2} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$. Donc, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2)$.

III - Définition et étude de la fonction ζ de Riemann

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose encore $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

• Domaine de définition.

$\dfrac{1}{n^x}$ existe pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$. D'autre part, on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{n^x}$, $n \geqslant 1$, converge si et seulement si $x > 1$. Donc, $\zeta(x)$ existe si et seulement si $x > 1$.

$$\boxed{D_\zeta =]1, +\infty[.}$$

• Sens de variation.

Soit $(x, y) \in]1, +\infty[^2$ tel que $x < y$. Pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^x} > \dfrac{1}{n^y}$ (par stricte décroissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{n^t} = \left(\dfrac{1}{n}\right)^t$ (fonction exponentielle de base $\dfrac{1}{n} \in]0, 1[$)). En sommant ces inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} > \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^y}$ puis, en ajoutant 1 à chaque membre de cette inégalité, on obtient $\zeta(x) > \zeta(y)$.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in]1, +\infty[^2$ tel que $x < y$, on a $\zeta(x) > \zeta(y)$ et donc,

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est strictement décroissante sur }]1, +\infty[.}$$

• Continuité.

Soit $a > 1$. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant a$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^a}$ avec égalité obtenue pour $x = a$. On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{1}{n^a}$. Puisque $a > 1$, la série numérique de terme général $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge.

Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge normalement et donc uniformément vers la fonction ζ sur $[a, +\infty[$. Comme chaque fonction f_n est continue sur $[a, +\infty[$, il en est de même de la fonction ζ.

On a montré que la fonction ζ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 1$ et donc que

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est continue sur }]1, +\infty[.}$$

• Convexité.

Chaque fonction f_n est convexe sur $]1, +\infty[$ (car deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée seconde $f_n'' : x \mapsto \dfrac{\ln^2 n}{n^x}$ positive sur $]1, +\infty[$). Donc, ζ est convexe sur $]1, +\infty[$ en tant que limite simple sur $]1, +\infty[$ d'une suite de fonctions convexes sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est convexe sur }]1, +\infty[.}$$

• Etude en $+\infty$.

La série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge uniformément vers la fonction ζ sur $[2, +\infty[$. D'autre part, chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ à savoir $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction ζ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1.}$$

• Limite en 1.

La fonction ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$ et admet donc en 1 à droite une limite ℓ élément de $]-\infty,+\infty]$.

Pour tout $x>1$ et tout $N\in\mathbb{N}^*$, $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}$. En faisant tendre x vers 1, on obtient $\ell\geqslant\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ pour tout N dans $\mathbb{N}^*$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\ell\geqslant+\infty$ et donc $\ell=+\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\zeta(x)=+\infty.}$$

• Equivalent de $\zeta(x)$ en 1.

1ère étude. Soit $x>1$. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$. Donc, pour $n\geqslant1$, $\dfrac{1}{n^x}\geqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,dt$. En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}\zeta(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\\&\geqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,dt=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^x}\,dt=\left[-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_1^{+\infty}\\&=\frac{1}{x-1}\ (\lim_{t\to+\infty}-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}}=0\text{ car }x-1>0).\end{aligned}$$

D'autre part, pour $n\geqslant1$, $\dfrac{1}{n^x}\leqslant\displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^x}\,dt$. En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\zeta(x)-1=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^x}\,dt=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^x}\,dt=\frac{1}{x-1}.$$

Ainsi,

$$\text{pour tout }x>1,\ \frac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x)\leqslant\frac{1}{x-1}+1.$$

On en déduit que pour tout $x>1$, $1\leqslant(x-1)\zeta(x)\leqslant1+(x-1)$. Le théorème des gendarmes montre que $(x-1)\zeta(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1 par valeurs supérieures ou encore que

$$\boxed{\zeta(x)\underset{x\to1,\ x>1}{\sim}\frac{1}{x-1}.}$$

2ème étude. On utilise une fonction auxiliaire. Pour $x>0$, posons $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Soit $x>0$. La suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)$ tend vers 0 en décroissant. Donc la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Soit $n\geqslant1$. Pour $x>0$, posons $R_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour tout $n\geqslant1$ et tout $x\geqslant\dfrac{1}{2}$,

$$|R_n(x)|\leqslant\left|\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{(n+1)^x}\right|=\frac{1}{(n+1)^x}\leqslant\frac{1}{(n+1)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

puis pour tout $n\geqslant1$, $\|R_n\|_{\infty,[\frac12,+\infty[}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|R_n\|_{\infty,[\frac12,+\infty[}=0$ et donc que la série de fonctions de terme général $x\mapsto\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément vers f sur $\left[\dfrac12,+\infty\right[$.

Puisque chaque fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$, $n \geqslant 1$, est continue sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, on en déduit que f est continue sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ en tant que limite uniforme sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ d'une suite de fonctions continues sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. En particulier,

$$f(x) \underset{x \to 1}{\sim} f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Ensuite, pour $x > 0$,

$$\zeta(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + (-1)^n\right) \frac{1}{n^x} = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^x} = 2^{1-x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = 2^{1-x}\zeta(x)$$

et donc, pour $x > 1$, $\zeta(x) = \dfrac{f(x)}{1 - 2^{1-x}}$. Mais alors

$$\zeta(x) = \frac{f(x)}{1 - e^{(1-x)\ln 2}} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{\ln 2}{-\ln 2(1-x)} = \frac{1}{x-1}.$$

• **Dérivation.**

Soit $a > 1$. Pour $x \geqslant a$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$. La série de fonction de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers la fonction ζ sur $[a, +\infty[$ et chaque fonction f_n est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant a,\ \forall k \in \mathbb{N},\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^x}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifions que la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$, converge normalement sur $[a, +\infty[$. Pour tout $x \geqslant a$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| = \frac{\ln^k(n)}{n^x} \leqslant \frac{\ln^k(n)}{n^a} \text{ (par décroissance de la fonction } t \mapsto n^{-t} \text{ sur } \mathbb{R}),$$

et donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{\ln^k(n)}{n^a}$. Pour tout $n \geqslant 1$, $n^{\frac{a+1}{2}} \times \dfrac{\ln^k(n)}{n^a} = \dfrac{\ln^k(n)}{n^{\frac{a-1}{2}}}$ avec $\dfrac{a-1}{2} > 0$. On en déduit que $n^{\frac{a+1}{2}} \times \dfrac{\ln^k(n)}{n^a} \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées ou encore

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right),$$

avec $\dfrac{a+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$. La série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ est donc convergente et il en est de même de la série numérique de terme général $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$. Ainsi, la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$, est normalement et en particulier uniformément convergente sur $[a, +\infty[$.

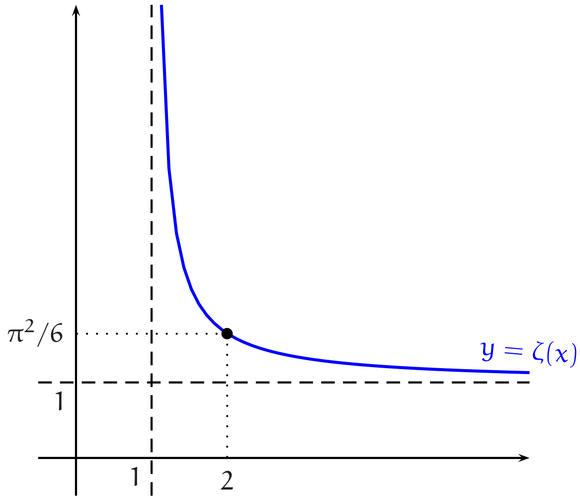
En résumé,

- la série de fonction de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers la fonction ζ sur $[a, +\infty[$;
- chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$, converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, la fonction ζ est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ceci étant pour tout réel a strictement supérieur à 1, on a montré que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]1, +\infty[\text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 1,\ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^x}.}$$

• **Graphe.**


$y = \zeta(x)$
$\pi^2/6$
1
1
2