Planche n° 11. Intégrales dépendant d'un paramètres. Corrigé

Exercice n° 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. On considère $F_n : \begin{array}{ccc} [a,A]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1}{(t^2+x^2)^n} \end{array}$.

• Pour chaque x de $[a, A]$, la fonction $t \mapsto F_n(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $F_n(x, t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}} > 0$ avec $2n > 1$.
• La fonction F_n est admet sur $[a, A] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x,t) \in [a,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t) = \frac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [a, A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,

-pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a, A]$,
-pour chaque $(x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}} \leqslant \frac{2nA}{(t^2+a^2)^{n+1}} = \varphi(t),$$

où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction I_n est de classe C^1 sur $[a, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que la fonction I_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0,\ I_n'(x) = -2nx\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,dt = -2nxI_{n+1}(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n'(x) = -2nxI_{n+1}(x).}$$

2) Pour $x > 0$, on a $I_1(x) = \left[\dfrac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2x}$. Ensuite, $I_2(x) = -\dfrac{1}{2x}I_1'(x) = \dfrac{\pi}{4x^3}$ puis $I_3(x) = -\dfrac{1}{4x}I_2'(x) = \dfrac{3\pi}{16x^5}$ et donc $I_3(1) = \dfrac{3\pi}{16}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt = \frac{3\pi}{16}.}$$

Exercice n° 2

1) a) Parité de F. Soit x un réel du domaine de définition de F. En posant $t = \theta + \pi$, on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 + 2x\cos t + 1)\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 + 2x\cos t + 1)\,dt \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln((-x)^2 - 2(-x)\cos t + 1)\,dt = F(-x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $F(x)$ existe si et seulement si $F(-x)$ existe et de plus $F(x) = F(-x)$.

$$\boxed{\text{F est paire.}}$$

Définition de F. Soit $x \in [0, +\infty[$. Pour tout réel $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = \left|x - e^{i\theta}\right|^2 \geqslant 0.$$

De plus, $\left|x - e^{i\theta}\right| = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} = x \Leftrightarrow x = 1$ et $\theta = 0$. Par suite,

- si $x \neq 1$, la fonction $\theta \mapsto x^2 - 2x\cos\theta + 1$ est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
- si $x = 1$, pour tout réel $\theta \in [-\pi, \pi]$ on a $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$. La fonction $\theta \mapsto \ln\left(4\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)$ est continue sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ et quand θ tend vers 0

$$\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2\ln 2 + 2\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \sim 2\ln\left|\frac{\theta}{2}\right| \sim 2\ln|\theta| = o\left(\frac{1}{\sqrt{|\theta|}}\right).$$

On en déduit que la fonction $\theta \mapsto \ln\left(4\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et donc que $F(1)$ existe.

Finalement, F est définie sur $[0, +\infty[$ et par parité

$$\boxed{\text{F est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque. Par parité de la fonction $\theta \mapsto \ln(x^2-2x\cos\theta+1)$, pour tout réel x, on a encore $F(x) = 2\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2-2x\cos\theta+1)\, d\theta$.

Continuité de F. Soit $A > 1$. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [0, A]\times]0, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ (x, \theta) & \mapsto & \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) \end{array}$.

- Pour chaque $x \in [0, A]$, la fonction $\theta \mapsto \Phi(x, \theta)$ est continue par morceaux sur $]0, \pi[$.
- Pour chaque $\theta \in]0, \pi[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, \theta)$ est continue par morceaux sur $[0, A]$.
- Pour chaque $(x, \theta) \in [0, A]\times]0, \pi[$, puisque $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = \left|x - e^{i\theta}\right|^2$, si $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, la fonction $x \mapsto x^2 - 2x\cos\theta + 1$ croît de 1 à $A^2 - 2A\cos\theta + 1$ puis la fonction $x \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$ croît de 0 à $\ln\left(A^2 - 2A\cos\theta + 1\right)$, et si $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction $x \mapsto x^2 - 2x\cos\theta + 1$ décroît de 1 à $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ et croît de $\sin^2\theta$ à $A^2 - 2A\cos\theta + 1$ puis la fonction $x \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$ décroît de 0 à $\ln\left(\sin^2\theta\right) \leqslant 0$ puis croît de $\ln\left(\sin^2\theta\right) \leqslant 0$ à $\ln\left(A^2 - 2A\cos\theta + 1\right)$. Finalement, dans tous les cas,

$$\begin{aligned} |\Phi(x, \theta)| &\leqslant \text{Max}\{\left|\ln^2(|\sin\theta|)\right|, \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|\} \\ &= \text{Max}\{2\left|\ln(|\sin\theta|)\right|, \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|\} = \varphi(\theta). \end{aligned}$$

On a vu que la fonction $f_1 : \theta \mapsto 2|\ln(|\sin\theta|)|$ est intégrable sur $]0, \pi[$ et d'autre part, la fonction $f_2 : \theta \mapsto \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|$ est intégrable sur $[0, \pi]$ et donc sur $]0, \pi[$ car continue sur $[0, \pi]$ (car $A > 1$). Puisque $\varphi = \dfrac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$, on en déduit que la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, \pi[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est continue sur $[0, A]$ et ceci pour tout $A > 1$. Par suite, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^+$ puis par parité,

$$\boxed{\text{la fonction F est continue sur } \mathbb{R}.}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2) - \ln(x^2))\, d\theta = -4\pi\ln|x| + F(x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F\left(\frac{1}{x}\right) = -4\pi\ln|x| + F(x).}$$

c) Dérivabilité de F sur $]-1,1[$. Soient $A \in]0,1[$ puis $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A,A]\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x,\theta) & \mapsto & \ln(x^2-2x\cos\theta+1) \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $\theta \mapsto \Phi(x,\theta)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,\pi]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

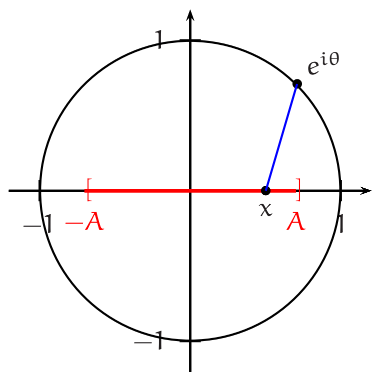
$$\forall (x,\theta) \in [-A,A]\times[0,\pi],\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta) = \frac{2x-2\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$,
- pour chaque $\theta \in [0,\pi]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)$ est continue sur $[-A,A]$,
- pour chaque $(x,\theta) \in [-A,A]\times[0,\pi]$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)\right| = \frac{2|x-\cos\theta|}{|x-e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{4}{|A-1|^2} = \varphi(\theta).$$

La dernière inégalité écrite est claire géométriquement :



La plus courte distance d'un point du segment $[-A,A]$ au cercle trigonométrique est la distance de A à 1.

De plus, la fonction constante φ est intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction F est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A \in]0,1[$, F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $F'(x) = 4\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta$.

Pour tout tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right) + 4\pi\ln|x|$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décrit $]-1,0[\cup]0,1[$, F est de classe C^1 sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout réel $x>1$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{x^2}\times 4\int_0^{\pi} \frac{\frac{1}{x}-\cos\theta}{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\theta+1}\,d\theta + \frac{4\pi}{x} = 4\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}\times\frac{-1+x\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}+\frac{1}{x}\right)d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}\times\frac{x^2-x\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\right)d\theta = 4\int_0^{\pi}\frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta. \end{aligned}$$

Finalement F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ F'(x) = 4\int_0^{\pi}\frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta.}$$

d) Calcul de $F'(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. On pose $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. On a donc $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $d\theta = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. On obtient

$$F'(x)=4\int_0^{\pi}\frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\ d\theta=8\int_0^{+\infty}\frac{x-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{x^2-2x\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=8\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)x-(1-t^2)}{((1+t^2)x^2-2x(1-t^2)+(1+t^2))(1+t^2)}\ dt$$

$$=8\int_0^{+\infty}\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}\ dt$$

Pour tout réel t,

$$\left(t^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)(t^2+1)=\left(t-i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(t+i\frac{x-1}{x+1}\right)(t-i)(t+i).$$

De plus, $\pm\dfrac{x-1}{x+1}=\pm1\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x+1}=-1\Leftrightarrow x=0$.

• $F'(0)=4\displaystyle\int_0^{\pi}(-\cos\theta)\ d\theta=0$.

• Si $x\neq0$, les pôles de la fraction rationnelle $\dfrac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}$ sont simples et par parité, la décomposition en éléments simples de cette fraction s'écrit

$$\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}=\frac{a}{t-i\dfrac{x-1}{x+1}}-\frac{a}{t+i\dfrac{x-1}{x+1}}+\frac{b}{t-i}-\frac{b}{t+i},$$

avec

$$a=\frac{-(x+1)\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2+(x-1)}{(x+1)^2\left(2i\dfrac{x-1}{x+1}\right)\left(1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2\right)}=\frac{-(x+1)(x-1)^2+(x-1)(x+1)^2}{2i(x+1)(x-1)((x+1)^2-(x-1)^2)}$$

$$=\frac{2(x^2-1)}{2i(x^2-1)(4x)}=\frac{1}{4ix},$$

et

$$b=\frac{-(x+1)+(x-1)}{2i(-(x+1)^2+(x-1)^2)}=\frac{1}{4ix}.$$

Donc

$$8\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}=\frac{2}{ix}\left(\frac{1}{t-i\dfrac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{t+i\dfrac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{t-i}-\frac{1}{t+i}\right)$$

$$=\frac{2}{ix}\left(\frac{2i\dfrac{x-1}{x+1}}{t^2+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}+\frac{2i}{t^2+1}\right)=\frac{4}{x}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)$$

Ensuite, en notant ε le signe de $\dfrac{x-1}{x+1}$

$$F'(x)=\frac{4}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)\ dt$$

$$=\frac{4}{x}\left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2}\frac{1}{\dfrac{x-1}{x+1}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)+\operatorname{Arctan}t\right]_0^{+\infty}=\frac{4}{x}(\varepsilon+1)\frac{\pi}{2}$$

Par suite, si $x \in]-1,1[$, $F'(x) = 0$ et si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{4\pi}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ F'(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in]-1,1[\\ \dfrac{4\pi}{x} \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{array}\right. .}$$

e) Soit $x > 1$. Puisque $F(x) - 4\pi\ln(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi\ln(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to0} F(y) = F(0) = 0$ par continuité de F en 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi\ln(x)) = 0.}$$

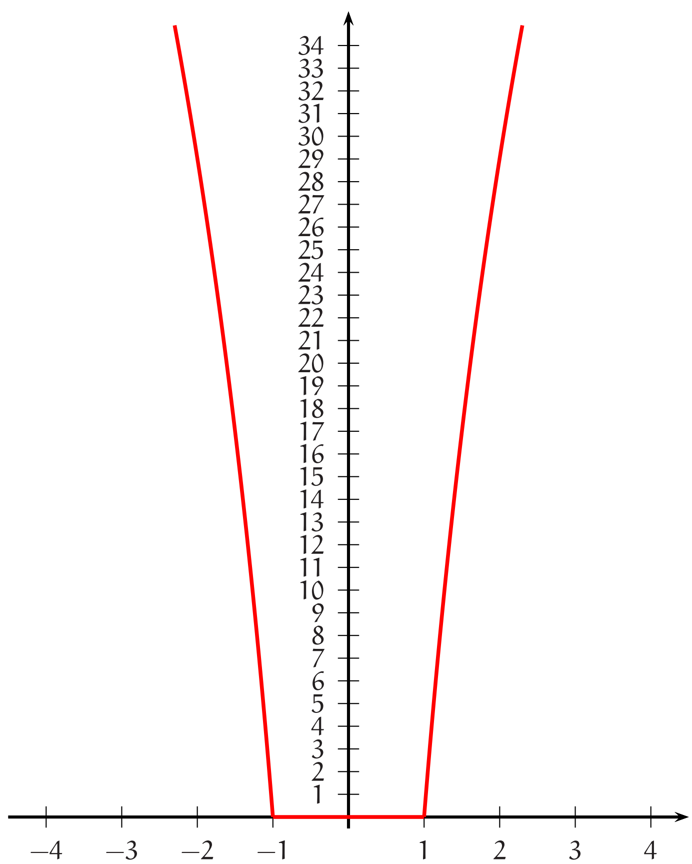
f) • F est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée nulle sur $]-1,1[$. Donc la fonction F est constante sur l'intervalle $[-1,1]$. Par suite, pour tout réel $x \in [-1,1]$, $F(x) = F(0) = 0$.

• F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x > 1$, $F'(x) = \dfrac{4\pi}{x}$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 1$, $F(x) = 4\pi\ln x + C$ avec $C = \lim\limits_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi\ln x) = 0$. Donc $\forall x > 1$, $F(x) = 4\pi\ln x$.

• Si $x < -1$, $F(x) = F(-x) = 4\pi\ln(-x) = 4\pi\ln|x|$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\ d\theta = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 4\pi\ln(|x|) \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{array}\right. .}$$

Graphe de F.



2) a) Soit $x \in]-1,1[$. Pour $\theta \in [-\pi,\pi]$, on pose $f(\theta) = \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$. Puisque $\forall \theta \in [-\pi,\pi]$, $x^2 - 2x\cos\theta + 1 > 0$ (voir 1)), f est dérivable sur $[-\pi,\pi]$ et pour $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned}
f'(\theta) &= \frac{2x\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{i\theta}}{x-e^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{x-e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{i}\left(-\frac{1}{1-xe^{-i\theta}} + \frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\\
&= \frac{1}{i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-in\theta}\right) \text{ (car } |xe^{i\theta}| = |xe^{-i\theta}| = |x| < 1)\\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n.
\end{aligned}$$

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. I désigne l'intervalle $[0, \theta]$ ou $[\theta, 0]$ suivant que θ soit positif ou négatif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I$, posons $g_n(t) = 2\sin(nt)x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I$, on a $|f_n(t)| \leqslant |x|^n$. Comme $|x|^n$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment I. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= f(0) + \int_0^\theta f'(t)\ dt = 2\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^n \int_0^\theta \sin(nt)\ dt\\
&= 2\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \forall \theta \in [-\pi, \pi],\ \ln(x^2-2x\cos\theta+1) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n.}$$

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\left|\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n\right| \leqslant |x|^n$. Comme précédemment, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$F(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta)\ d\theta = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\ d\theta = 0.}$$

b) Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. $F(x) = 4\pi\ln|x| + F\left(\frac{1}{x}\right) = 2\pi\ln|x|$ (car $\frac{1}{x} \in]-1, 1[$). Cette égalité reste vraie pour $x = 1$ ou $x = -1$ par continuité. On a ainsi retrouvé les résultats du 1).

Exercice n° 3

1) Soit $A > 0$. Soit $\begin{array}{rccc} \Phi : & [-A, A]\times[0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, t) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour chaque x de $[-A, A]$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur ce segment.
• La fonction Φ admet sur $[-A, A]\times[0, 1]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A]\times[0, 1],\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$,
- pour chaque $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour chaque $(x, t) \in [-A, A]\times[0, 1]$, $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant 2A = \varphi(t)$, la fonction φ étant continue et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction F est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ dt.}$$

2) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\ dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Il en est de même de la fonction G et pour tout réel x,

$$\boxed{G'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\ dt.}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $u = xt$, on obtient

$$F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\ x dt = -e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\ du = -G'(x),$$

cette égalité restant vraie quand $x = 0$ par continuité des fonctions F' et G' sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $F' + G' = 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}.}$$

4) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+0^2)}}{1+0^2}\ dt = e^{-x^2},$$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

5) Pour $x > 0$, on a $\int_0^x e^{-t^2}\ dt \geqslant 0$ et donc d'après la question 3),

$$\int_0^x e^{-t^2}\ dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - F(x)}.$$

La question 4) permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

6) Par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$. En posant $t = x^2$ et donc $x = \sqrt{t}$ puis $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\ dt$, on obtient

$$\sqrt{\pi} = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt.$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).}$$

Exercice n° 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx) = \dfrac{1}{2}(e^{-t^2+tx} + e^{-t^2-tx}) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut poser $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt$.

Calcul de $f(x)$. Soit $A > 0$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A,A]\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx) \end{array}$.

- Pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
- La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx).$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,

-pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[-A,A]$,

- pour chaque $(x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}|\operatorname{sh}(tx)| \leqslant te^{-t^2}\operatorname{sh}(t|A|) = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction f est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $A > 0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue maintenant une intégration par parties. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto te^{-t^2}$ et $t \mapsto \operatorname{sh}(tx)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\right]_0^A + \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = -\frac{1}{2}e^{-A^2}\operatorname{sh}(xA) + \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt = \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = \frac{x}{2}f(x)$.

Ensuite, pour tout réel x, $e^{-x^2/4}f'(x) - \dfrac{x}{2}e^{-x^2/4}f(x) = 0$ ou encore $(e^{-x^2/4}f)'(x) = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2/4}f(x) = e^0 f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}.}$$

Exercice n° 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}t^x$ est continue sur $]0,1[$.

Etude en 1. $\dfrac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 1}{\sim} 1\times 1 = 1$ et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}t^x$ se prolonge par continuité en 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.

Etude en 0. $\dfrac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t^x}{\ln t} > 0$.

-si $x > -1$, $-\dfrac{t^x}{\ln t} \underset{t\to 0}{=} o(t^x)$ et puisque $x > -1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

- si $x \leqslant -1$, la fonction $t \mapsto -\dfrac{t^x}{\ln t}$ domine la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{t\ln t}$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. Puisque la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{t\ln t}$ est positive et que $\displaystyle\int_x^{1/2} -\dfrac{1}{t\ln t}\,dt = \ln|\ln(x)| - \ln|\ln(1/2)| \underset{x\to 0}{\to} +\infty$, la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{t\ln t}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de 0. Il en est de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}t^x$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x > -1$. Pour $x > -1$, on peut poser $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t-1}{\ln t}t^x\,dt$.

Calcul de $f(x)$. Soit $a > -1$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{t-1}{\ln t}t^x \end{array}$.

- Pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}t^x$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.
- La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times]0,1[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$,

-pour chaque $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$,

- pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = (1-t)t^a = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,1[$ et intégrable sur $]0,1[$ car $a > -1$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > -1$, la fonction f est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x > -1,\ f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,dt = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > -1,\ f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) + C \quad (*)$. Pour déterminer la constante C, on peut utiliser le résultat de l'exercice n° 7, planche 8 : $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2$. On peut aussi obtenir directement la constante C sans aucun calcul d'intégrale. Pour cela, déterminons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur le segment $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et en 1 en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. On en déduit que cette fonction est bornée sur l'intervalle $]0,1[$ (car son prolongement est une fonction continue sur un segment).
Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $x > -1$, on a

$$|g(x)| \leqslant M\int_0^1 t^x\,dt = \frac{M}{x+1}.$$

Ceci montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient $C = 0$. On a donc montré que

$$\boxed{\forall x > -1,\ \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,dt = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).}$$

On retrouve en particulier $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2$.

Exercice n° 6

Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ existe pour tout réel positif x et on pose $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

Continuité de f sur $[0,+\infty[$. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

- Pour chaque $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour chaque $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$|\Phi(x,t)| = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi_0(t).$$

De plus, la fonction φ_0 est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car équivalente à $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, f est continue sur $[0,+\infty[$.

Dérivée seconde de f. Soit $a > 0$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

En plus de ce qui précède, Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 définies par

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

- Pour chaque $x \in [a,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[a,+\infty[$.
- Pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{te^{-at}}{1+t^2} = \varphi_1(t) \text{ et } \left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2} = \varphi_2(t).$$

De plus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ car négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ et ses dérivées premières et secondes s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt \text{ et } f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.}$$

Equation différentielle vérifiée par f. Pour $x > 0$,

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) + f''(x) = \frac{1}{x}.}$$

Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,dt$. Si $x = 0$, le n° 3, 1) de la planche 8 montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est une intégrale convergente. Si $x > 0$, une intégration par parties fournit pour $A > 0$

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t+x}\,dt = -\frac{\cos A}{A+x} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_0^A \dfrac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ et il en est de même de la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_0^A \dfrac{\sin t}{t+x}\,dt$. Ainsi, pour chaque $x \in [0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t+x}\,dt$ est une intégrale convergente.

Pour $x \geqslant 0$, on peut donc poser $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t+x}\,dt$.

Equation différentielle vérifiée par g. Pour $x > 0$, on pose $u = x + t$. on obtient

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du.$$

(car toutes les intégrales considérées sont convergentes). Maintenant, les fonctions $c\ :\ u \mapsto \dfrac{\cos u}{u}$ et $s\ :\ u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ sont continues sur $]0,+\infty[$ et admettent donc des primitives sur $]0,+\infty[$. On note C (respectivement S) une primitive de la fonction c (respectivement s) sur $]0,+\infty[$). Pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u}\,du = \left(\lim_{t\to+\infty} C(t)\right) - C(x)$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-c$. De même, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-s$. Mais alors la fonction g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \frac{\sin x \cos x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos x \sin x}{x} \\ &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du. \end{aligned}$$

La fonction g' est encore de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos^2 x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du + \frac{\sin^2 x}{x} \\ &= \frac{1}{x} - g(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}.}$$

Egalité de f et g sur $]0,+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, $(f-g)''(x) + (f-g)(x) = 0$. Donc il existe deux réels λ et μ tels que $\forall x > 0$, $(f-g)(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x = A\cos(x+\varphi)$ pour $A = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ et pour un certain φ.

Maintenant, pour $x > 0$, $|f(x)| = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \dfrac{1}{x}$ et on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ensuite, $|g(x) \leqslant \left|\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u}\,du\right| + \left|\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u}\,du\right|$. Puisque les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u}\,du$ sont des intégrales convergentes, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u}\,du = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u}\,du = 0$ et donc aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ ce qui impose $A = 0$ et donc $\forall x > 0$, $f(x) = g(x)$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.}$$

Continuité de g en 0 et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,dt$. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du \\ &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \sin x \int_x^{1} \frac{1-\cos u}{u}\,du - \sin x \ln x. \end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $\sin x \ln x \sim x \ln x$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \ln x = 0$. Ensuite, la fonction $u \mapsto \dfrac{1-\cos u}{u}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \displaystyle\int_x^1 \dfrac{1-\cos u}{u}\, du = 0 \times \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-\cos u}{u}\, du = 0$. Il reste

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = g(0).$$

La fonction g est donc continue en 0. Puisque la fonction f est également continue en 0, on en déduit que

$$g(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt \text{ et en particulier, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice n° 7

• Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur le segment $[0, T]$ et donc intégrable sur ce segment. Par suite, $f * g(x)$ existe.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $f * g(x+T) = \displaystyle\int_0^T f(x+T-t)g(t)\, dt = \int_0^T f(x-t)g(t)\, dt = f * g(x)$. Donc la fonction $f * g$ est T-périodique.

• Les fonction f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Ces fonctions sont en particulier bornées sur $\mathbb{R}$. On note M_1 et M_2 des majorants sur $\mathbb{R}$ des fonctions $|f|$ et $|g|$ respectivement.

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0, T] & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}$.

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, T]$.
- Pour chaque $t \in [0, T]$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, $|\Phi(x, t)| \leqslant M_1 M_2 = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue et donc intégrable sur le segment $[0, T]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soient f et g deux éléments de E. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x - t$, on obtient

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_0^T f(x-t)g(t)\, dt = \int_x^{x-T} f(u)g(u-t)\, (-du) = \int_{x-T}^x g(u-t)f(u)\, du \\ &= \int_0^T g(u-t)f(u)\, du \\ &\text{(car la fonction } u \mapsto g(u-t)f(u) \text{ est } T\text{-périodique et car } [x-T, x] \text{ est de longueur } T) \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$