Résumé de Math Sup et compléments : algèbre linéaire

I - Espaces vectoriels - Sous espaces vectoriels

1) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un ensemble non vide muni d'une l.d.c.i. notée $+$ et d'une l.d.c.e. de domaine $\mathbb{K}$ notée..

$(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\Leftrightarrow$ $(E, +)$ est groupe abélien (c'est-à-dire que $+$ est commutative, associative, possède un élément neutre noté 0 et tout x de E possède un symétrique pour $+$ noté $-x$) et $+$ et $.$ vérifient les quatre axiomes
(1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
(2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
(3) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
(4) $\forall x \in E$, $1.x = x$.

2) Exemples de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels supposés connus (Dans les exemples qui suivent les opérations ne sont pas citées et sont toujours les opérations usuelles dans les ensembles considérés)

a) $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

1) $\mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension infinie, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension infinie, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
2) $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev (modèle de l'espace de dimension n : tout espace de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$)
3) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension infinie (suites à coefficients dans $\mathbb{K}$).
4) $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension infinie (polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$).
5) $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension infinie (fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$).
6) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension infinie (applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et plus généralement F^A (ensemble des applications de A dans F) où A est un ensemble quelconque non vide et F est un $\mathbb{K}$-ev
7) $(\mathscr{L}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quand E et F le sont et en particulier $(\mathscr{L}(E), +, .)$. Si E et F sont de dimension finie, $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
8) $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si les E_i le sont. Si les E_i sont de dimension finie, $\dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.
9) $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np.
10) $D^k(I, \mathbb{K})$, $C^k(I, \mathbb{K})$ et $C^\infty(I, \mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces de dimension infinie.

b) $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis en plus d'une structure d'anneau

1) $(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.
2) $(\mathscr{L}(E)+, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\mathscr{L}(E)+, \circ)$ est un anneau, non commutatif si $\dim E \geqslant 2$.
3) $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, non commutatif si $n \geqslant 2$.
4) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre (c'est-à-dire qu'un produit de facteurs peut être nul sans qu'aucun facteur ne soit nul)
5) $(C^0(I, \mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(C^0(I, \mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
$(D^k(I, \mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(C^k(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
$(C^k(I, \mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(C^k(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
$(C^\infty(I, \mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(C^\infty(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
6) $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif et intègre.
$(\mathbb{K}(X), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

c) structure de $\mathbb{K}$-algèbre (complément de spé)

Définition. Soit $\mathscr{A}$ un ensemble non vide muni de deux l.d.c.i notée $+$ et $\times$ et d'une l.d.c.e de domaine $\mathbb{K}$ notée ..
$(\mathscr{A}, +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre si et seulement si
- $(\mathscr{A}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- $(\mathscr{A}, +, \times)$ est un anneau ;
- pour tout $x \in \mathscr{A}$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$.

La dimension de l'algèbre $(\mathscr{A}, +, ., \times)$ est la dimension de l'espace vectoriel $(\mathscr{A}, +, .)$.
L'algèbre $(\mathscr{A}, +, ., \times)$ est dite commutative si et seulement si l'anneau $(\mathscr{A}, +, \times)$ est commutatif ce qui équivaut à $\times$ est commutative.

L'algèbre $(\mathscr{A}, +, ., \times)$ est dite intègre si et seulement si l'anneau $(\mathscr{A}, +, \times)$ est intègre ce qui équivaut à : $\forall (x, y) \in \mathscr{A}^2$, $x \times y = 0 \Rightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$ (et donc $(\mathscr{A}, +, \times)$ pas intègre $\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathscr{A}^2 /\ x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $x \times y = 0)$.

$\mathbb{K}$-algèbres supposées connues.
1) $(\mathbb{C}, +, ., \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative et intègre de dimension 2.
2) $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non commutative et non intègre si $n \geqslant 2$.
3) $(\mathscr{L}(E) +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non commutative et non intègre si $\dim(E) \geqslant 2$.
4) $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et intègre (on doit aussi savoir que $(\mathbb{K}_n[X], +, ., \times)$ n'est pas une algèbre car $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable pour la multiplication).
$(\mathbb{K}(X), +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
5) $(\mathbb{K}^{\mathscr{E}}, +, ., \times)$ (où $\mathscr{E}$ est un ensemble non vide quelconque) est une $\mathbb{K}$-algèbre.

3) Sous espaces vectoriels

a) Définition et caractérisation.

$$
\begin{aligned}
F \text{ sev de } E &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} F \subset E,\ F \neq \varnothing,\ F \text{ stable pour } + \text{ et } . \text{ et } F \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev pour les lois induites}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \subset E,\ 0_E \in F \text{ et } F \text{ stable pour } + \text{ et } .\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \subset E,\ 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F \text{ et } \forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \subset E,\ 0_E \in F \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + \mu y \in F \text{ (c'est-à-dire } F \text{ stable par combinaisons linéaires)}
\end{aligned}
$$

b) Intersection et somme.
Si F et G sont deux sev de E alors $F \cap G$ et $F + G$ sont des sev de E. Plus généralement, si F_1, F_2,..., F_p sont des sev de E alors $F_1 \cap F_2 ... \cap F_p$ et $F_1 + F_2 ... + F_p$ sont des sev de E.

Remarque. En général, $F \cup G$ n'est pas un sev et $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$ (voir exercice n° 1, planche 1).

c) Résumé des différentes techniques pour vérifier qu'un sous-ensemble de E est un sev de E.
Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- F sev de $E \Leftrightarrow F \subset E,\ 0_E \in F$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + \mu y \in F$.
- Si F est l'intersection ou la somme de plusieurs sous-espaces, F est un sev de E.
- Si $F = \text{Vect}(A)$ pour une certaine partie ou famille A de E (y compris $A = \varnothing$), F est un sev de E.
- Si $F = \text{Ker}(f)$ où f est linéaire de E vers un espace vectoriel, F est un sev de E.
- Si F est l'orthogonal pour un produit scalaire d'une certaine partie A de E (y compris $A = \varnothing$), F est un sev de E.

d) Sous-algèbres.
Soit $(A, +, ., \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et soit B une partie non vide de A.

$$
\begin{aligned}
B \text{ sous-algèbre de } A &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A,\ B \neq \varnothing,\ B \text{ stable pour } +,\ . \text{ et } \times \text{ et } B \text{ est une } \mathbb{K}\text{-algèbre pour les lois induites}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} B \subset A,\ 0_A \in B \text{ et } B \text{ stable pour } +,\ . \text{ et } \times.\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} B \subset A,\ 0_A \in B \text{ et } \forall (x, y) \in B^2,\ x + y \in B \text{ et } \forall x \in B,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in B \text{ et } \forall (x, y) \in B^2,\ x \times y \in B\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} B \subset A,\ 0_A \in B \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in B^2,\ \lambda x + \mu y \in B \text{ et } \forall (x, y) \in B^2,\ x \times y \in B
\end{aligned}
$$

4) Sommes directes. Sous espaces vectoriels supplémentaires

a) Cas de deux sous espaces. Soient F et G deux sev de E.

$$
\begin{aligned}
\text{La somme } F + G \text{ est directe} &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{tout } x \text{ de } F + G \text{ s'écrit de manière unique } x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in F \text{ et } x_2 \in G\\
&\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{l'application } \begin{array}{cccc} \varphi : & F \times G & \to & E \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \text{ est injective}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \cap G = \{0\}.
\end{aligned}
$$

Dans ce cas, $F + G$ se note $F \oplus G$ et $F \oplus G$ est isomorphe à $F \times G$ (φ est un isomorphisme de $F \times G$ sur $F + G$).

$$\begin{aligned}
F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{tout } x \text{ de } E \text{ s'écrit de manière unique } x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in F \text{ et } x_2 \in G\\
&\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{l'application } \begin{array}{cccc} \varphi : & F \times G & \to & E \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \text{ est bijective}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \cap G = \{0\} \text{ et } E = F + G.
\end{aligned}$$

L'existence d'un supplémentaire est démontrée en dimension finie mais ne peut être utilisée en dimension infinie.
Si E « est » est un espace euclidien et F est un sev de E, $F^\perp$ est un supplémentaire de F et plus précisément, $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.

Exemples de base. • $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$ (décomposition d'une fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{\in \mathscr{P}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{\in \mathscr{I}}$.

• $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$ (décomposition d'une matrice M : $M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in A_n}$.

b) Cas général d'un nombre fini de sous espaces. $F_1, \ldots, F_p$, $p \geqslant 2$, sont p sev de E.

$$\begin{aligned}
\text{La somme } F_1 + \ldots F_p \text{ est directe} &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{tout } x \text{ de } F_1 + \ldots + F_p \text{ s'écrit de manière unique } x = x_1 + \ldots + x_p\\
&\text{où } \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in F_i\\
&\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{l'application } \begin{array}{cccc} \varphi : & F_1 \times \ldots \times F_p & \to & E \\ & (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & x_1 + \ldots + x_p \end{array} \text{ est injective}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} \forall i \in [\![1, p]\!],\ F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right) = \{0\}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} \forall i \in [\![2, p]\!],\ F_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_j\right) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la somme $F_1 + \ldots F_p$ se note $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$. $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ est isomorphe à $F_1 \times \ldots \times F_p$ (φ est un isomorphisme).

Danger. Il est faux de croire que la somme $\sum_i F_i$ est directe si et seulement si $\forall i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0\}$. Si la somme est directe, on a obligatoirement $\forall i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0\}$ mais ce n'est pas suffisant. Le cas de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes fournit un contre exemple usuel.

5) Projections et symétries Soient F et G deux sev supplémentaires de E. Soient p la projection sur F parallèlement à G, q la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Soit $x = x_1 + x_2$ la décomposition d'un vecteur quelconque x de E associée à la décomposition $E = F \oplus G$. Par définition, $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2$.

a) • $\forall x \in E$, $p(x) = x_1$.
• $p \in \mathscr{L}(E)$.
• $p \circ p = p$, $p \circ q = q \circ p = 0$, $p + q = \mathrm{Id}_E$.
• $F = \mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}q = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \{$vecteurs invariants par $p\}$ et $G = \mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}q = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$
• $p_{/\mathrm{Im}p} = \mathrm{Id}_{/\mathrm{Im}p}$ et $p_{/\mathrm{Ker}p} = 0_{/\mathrm{Ker}p}$.

Réciproquement, si p est un endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$ alors $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Ker}p$ sont supplémentaires (y compris en dimension infinie) et p est la projection sur $\mathrm{Im}p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}p$.

b) • $\forall x \in E$, $s(x) = x_1 - x_2$.
• $s \in GL(E)$.
• $s \circ s = \mathrm{Id}$. $s = 2p - \mathrm{Id} = \mathrm{Id} - 2q$ ou aussi $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)$.
• $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \{$vecteurs invariants par $s\}$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \{$vecteurs changés en leur opposé$\}$.

Réciproquement, si s est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}$ alors $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires (y compris en dimension infinie) et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

6) Combinaisons linéaires et sous-espace engendré par une famille ou une partie de E

a) Combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille non vide de scalaires. Cette famille est dite à support fini si et seulement si l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i \neq 0$ est fini (éventuellement vide).

Soit $(x_i)_{i\in I}$ est une famille non vide de vecteurs de E. Un vecteur y de E est combinaison linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$ si et seulement si il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini telle que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

En particulier, si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est de cardinal infini, un vecteur y est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ si et seulement si y est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Soit X une partie de E. y est combinaison linéaire des vecteurs de X si et seulement si il existe une famille de scalaires $(\lambda_x)_{x\in X}$ à support fini telle que $y = \sum_{x\in X} \lambda_x x$ (convention usuelle : $\sum_{\varnothing} = 0$).

b) Sous espace engendré par une famille ou une partie.

Approche externe. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E (ou X une partie de E) éventuellement vide. Il existe un et un seul plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) de E contenant les vecteurs de $\mathscr{F}$ (ou contenant X) et noté $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ (ou $\mathrm{Vect}(X)$). C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathscr{F}$ (ou X) (et donc $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$).

Approche interne. $\mathrm{Vect}\mathscr{F}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$.

c) Propriétés.

- $\mathrm{Vect}(x_i) = \{\text{combinaisons linéaires des } x_i\} = \left\{\sum_{i\in I} \lambda_i x_i,\ (\lambda_i)_{i\in I} \text{ à support fini}\right\}$ = plus petit sev de E contenant les vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$.
- $A \subset \mathrm{Vect}A$ et $\mathrm{Vect}A$ est un sev de E. Puis $A = \mathrm{Vect}A \Leftrightarrow A$ sev de E.
- $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Vect}A \subset \mathrm{Vect}B$ (réciproque fausse).
- $\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}A) = \mathrm{Vect}A$.
- $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}A + \mathrm{Vect}B$ et $\mathrm{Vect}(A \cap B) \subset \mathrm{Vect}A \cap \mathrm{Vect}B$.

II - Familles libres. Familles génératrices. Bases

1) Familles libres.

a) Définitions.

$(x_i)_{i\in I}$ est libre $\Leftrightarrow (\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in K^I$ à support fini$)\ [(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0) \Rightarrow (\forall i \in I,\ \lambda_i = 0)]$.

$(x_i)_{i\in I}$ est liée $\Leftrightarrow (\exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini telle que les λ_i ne soient pas tous nuls et $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0)$ (une telle relation est alors une relation de dépendance linéaire).

Une famille infinie est libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.
Une famille infinie est liée si et seulement si il existe une sous-famille finie liée.

b) Propriétés.

Soit $L = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- Si L contient le vecteur nul ou 2 vecteurs colinéaires, L est liée (réciproque fausse).
- L est liée si et seulement si il existe un vecteur de L qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de L.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre (convention : $\varnothing$ est libre).
- L est libre $\Leftrightarrow (\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \mu_i x_i \Leftrightarrow \forall i,\ \lambda_i = \mu_i)$ (on peut identifier les coefficients quand L est libre et uniquement quand L est libre)
- Soit $L' = L \cup \{x\}$. $[(L$ libre et L' liée$) \Rightarrow x$ est combinaison linéaire des $x_i)]$

Danger (ou erreur de base). Si les vecteurs de L ne sont pas deux à deux colinéaires, la famille L n'est pas nécessairement libre.

2)Familles génératrices.

$(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = E \Leftrightarrow$ tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.

3) Bases.

$\mathscr{B} = (x_i)_{i \in I}$ base de $E \Leftrightarrow$ tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $x_i \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est libre et génératrice.

Si $x = \sum_i \lambda_i x_i$, les λ_i sont les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Théorème. Les bases de E sont les familles génératrices minimales pour l'inclusion ou libres maximales. Donc, si $x \notin \mathscr{B}$, $\mathscr{B} \cup \{x\}$ n'est plus libre et si $x \in \mathscr{B}$, $B \setminus \{x\}$ n'est plus génératrice.

III- Applications linéaires

1) Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et f une application de E dans F.

$$\begin{aligned} f \text{ linéaire} &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Si f est linéaire, on a toujours $f(0_E) = 0_F$.

2) Images directes et réciproques.

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f linéaire de E dans F.
L'image directe d'un sous-espace de E est un sous-espace de F.
L'image réciproque d'un sous-espace de F est un sous-espace de E.

En particulier, $\mathrm{Ker} f = \{x \in E / \ f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace de E et $\mathrm{Im} f = \{f(x) / \ x \in E\} = f(E)$ est un sous espace de F.
(f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$), ($f$ surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F$) ($f$ bijective $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ et $\mathrm{Im} f = F$).

Vocabulaire usuel : (homomorphisme=application linéaire) (endomorphisme = application linéaire de E vers E) (isomorphisme = application linéaire bijective de E sur F) (automorphisme =application linéaire bijective de E sur E).

Théorème. Soit f linéaire de E vers F. Si X est génératrice de E, $f(X)$ est génératrice de $\mathrm{Im} f = f(E)$ et en particulier si f est surjective, $f(X)$ est génératrice de F.

Théorème. Si f est linéaire et X est liée alors $f(X)$ est liée. Si $f(X)$ est libre, X est libre.
Si f est injective et X est libre dans E alors $f(X)$ est libre dans F.

Théorème. f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si l'image par f d'une base de E est une base de F.

Détermination sur une base : soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par les $f(e_i)$ et en particulier deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales ou une application linéaire qui s'annule sur une base est nécessairement l'application nulle.

3) Ensembles d'applications linéaires.
• $(\mathscr{L}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et de plus $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est anneau, non commutatif si $\dim E \geqslant 2$.
• $(GL(E), \circ)$ est un groupe, non commutatif si $\dim E \geqslant 2$. $GL(E)$ = groupe linéaire de E = {automorphismes de E} = {inversibles de $\mathscr{L}(E)$ pour $\circ$}.
Danger. Si f et g sont dans $GL(E)$, $f + g$ ne l'est que très rarement.
• $(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, appelé le groupe orthogonal (notion euclidienne).
• $(SL(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}(E), \circ)$, appelé le groupe spécial linéaire (si E est de dimension finie, $SL(E)$ =ensemble des endomorphismes de E de déterminant 1).

IV - Dimension des espaces vectoriels

1) Dimension.
E est dit de dimension finie sur $\mathbb{K}$ si et seulement si E admet une famille génératrice finie. E est dit de dimension infinie sinon. E est de dimension infinie si et seulement si E contient une famille libre infinie.

Théorème de la dimension finie et définition. Si E de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal (fini) et $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ est le cardinal d'une base quelconque.
(Convention. $\varnothing$ est une base de $\{0\}$ et $\dim\{0\} = 0$.)

Deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.
$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ et si $e_i = (0, 0, ...0, 1, 0, ..., 0)$ alors $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si $\dim E = n < +\infty$, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

2) Familles libres et génératrices. Soit $n = \dim E < +\infty$.
Si L est libre alors $\mathrm{card} L \leqslant n$ et de plus (L base de $E \Leftrightarrow \mathrm{card} L = n$).
Si G est génératrice de E alors $\mathrm{card} G \leqslant n$ et de plus (G base de $E \Leftrightarrow \mathrm{card} G = n$.)

Théorème. Si E est de dimension finie n et si $\mathscr{B}$ est une famille de vecteurs de E, deux des trois propositions suivantes entrainent la troisième :
1) $\text{card}\mathscr{B} = n$
2) $\mathscr{B}$ est libre
3) $\mathscr{B}$ est génératrice de E

Théorème de la base incomplète. Soit L libre dans E de dimension finie. L peut être complétée en une base de E.
Si $\dim E < +\infty$, E admet des bases.
Si $\dim E < +\infty$, de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base.

3) Sous espaces.
Soit $n = \dim E < +\infty$ et soit F sev de E alors ($\dim F \leqslant n$ et $\dim F = n \Leftrightarrow F = E$) (faux en dimension infinie).
Théorème. (Supplémentaires) Soit $n = \dim E < +\infty$ et soit F sev de E
- F admet au moins un supplémentaire.
- Tout supplémentaire de F a pour dimension $\dim E - \dim F$.
- plus généralement, $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Théorème. Soient F et G sev de E.
$(E = F \oplus G) \Leftrightarrow (F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E) \Leftrightarrow (F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E)$.

Plus généralement, $\dim(F_1 \oplus \ldots \oplus F_p) = \dim F_1 + \ldots + \dim F_p$.
Si $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p = E$ et si $\mathscr{B}_i$ est une base de F_i alors $\mathscr{B} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{B}_i$ est une base de E. Réciproquement, si $\mathscr{B} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{B}_i$ est une base de E alors les $F_i = \text{Vect}\mathscr{B}_i$ sont supplémentaires dans E.

4) Rang.
a) d'une famille de vecteurs.
Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de vecteurs de E. $\text{rg}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} = \dim\text{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} =$ maximum du cardinal d'une sous-famille libre extraite de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
Soient $n = \dim E$, $r = \text{rg}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ (et $p = \text{card}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$).
- $r \leqslant p$ et $r = p \Leftrightarrow (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ libre.
- $r \leqslant n$ et $r = n \Leftrightarrow (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ génératrice de E.
- $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ base de $E \Leftrightarrow r = p = n$.

b) d'une application linéaire.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ où E est de dimension finie. $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}f) = \text{rg}((f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n})$ où $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E quelconque.

Théorème du rang. La restriction de f à un supplémentaire de $\text{Ker}f$ réalise un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\text{Im}f$. En particulier, $\dim\text{Ker}f + \text{rg}f = \dim E$.

Conséquences.
Théorème. Si $\dim E = \dim F < +\infty$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$) alors (f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective $\Leftrightarrow$ f est bijective).
Théorème. Si $n = \dim E < +\infty$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f bijective	2) $\det(f) \neq 0$	3) f injective
4) f surjective	5) $\text{Ker}f = \{0\}$	6) $\text{Im}f = E$
7) $\text{rg}f = n$	8) f inversible à droite pour $\circ$	9) f inversible à gauche pour $\circ$
10) f simplifiable à droite pour $\circ$	11) f simplifiable à gauche pour $\circ$	

c) Transformations ne modifiant pas le rang.
Les transformations élémentaires suivantes ne modifie pas le rang (car ne modifie pas le sous espace engendré) :
a) permuter les vecteurs de la famille
b) remplacer un vecteur x de la famille par λx où λ est un scalaire non nul
c) ajouter à un vecteur x de la famille un autre vecteur de la famille.

Plus généralement, on ne modifie pas le rang d'une famille en ajoutant à un vecteur x de cette famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

5) Dimensions usuelles.
- $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ et plus généralement $\dim(E_1 \times \ldots \times E_p) = \dim E_1 + \ldots + \dim E_p$.
- $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$ et plus généralement $\dim(E_1 \oplus \ldots \oplus E_p) = \dim E_1 + \ldots + \dim E_p$.
- $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = (\dim E) \times (\dim F)$. Donc $\dim(\mathscr{L}(E)) = (\dim E)^2$.
- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.