Devoir n° 7

Endomorphismes dans un espace de matrices
(d'après ENSA 89)

E est l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 ; on pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(on rappelle que (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$)

1 Soit A une matrice de E ; on lui associe l'application $\Phi(A)$ de E dans E définie par

$$\Phi(A)\colon M \mapsto AM - MA.$$

Vérifier que pour tout A, on a $\Phi(A) \in \mathcal{L}(E)$ (c'est-à-dire que $\Phi(A)$ est un endomorphisme de E).

2 Montrer que Φ est linéaire (en précisant, bien sûr, les espaces de départ et d'arrivée ; on fera tout particulièrement attention à ne pas confondre cette question et la précédente !). Déterminer $\Phi(\lambda I)$ (pour $\lambda \in \mathbf{R}$ fixé).

3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\Phi(A) = \tilde{0}_{\mathcal{L}(E)}$ (c'est-à-dire l'application nulle $M \mapsto O$) ; utiliser les matrices M_i pour montrer que $b = c = 0$ et que $a = d$.

4 En déduire que $\operatorname{Ker}\Phi = \mathcal{V}\mathrm{ect}(I)$ et que $\operatorname{Im}\Phi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3.

5 Soit $D = \{u \in \mathcal{L}(E) | (\forall M, N \in E)(u(MN) = u(M)N + Mu(N))\}$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que $\operatorname{Im}\Phi$ est inclus dans D.

6 Soit u un élément de D ; montrer que $u(I) = O$; calculer $M_2.M_2$ (on rappelle que (M_1, M_2, M_3, M_4) est la base « canonique » de E) et en déduire qu'on peut écrire $u(M_2)$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$.

7 Montrer de même que $u(M_3)$ est de la forme $\begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$ et que (avec les notations précédentes) $y + z = 0$.

8 Soit alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $a - d = y = -z$, $c = -x$ et $b = -t$. Montrer que $\Phi(A) = u$. Déduire de ce résultat (et des premières questions) que $\operatorname{Im}\Phi = D$.

9 On va à présent étudier sur un exemple l'endomorphisme $\Phi(A)$: on prend pour A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice de $u = \Phi(A)$ relativement à la base (de E) (M_1, M_2, M_3, M_4). Cette matrice sera notée U.

10 Déterminer une base du noyau et une base de l'image de u.

11 Montrer qu'il existe deux réels distincts (que l'on notera α et β) tels que $A - \alpha I$ et $A - \beta I$ ne soient pas régulières ; vérifier que $|\alpha - \beta| = 1$. Montrer que $u - id_E$ et $u + id_E$ ne sont pas des automorphismes de E.

12 Utiliser les questions précédentes pour diagonaliser U.