# Corrigé du devoir n° 7 (Endomorphismes dans un espace de matrices)

**1** Calculons $\Phi(A)(M+\lambda N) = A(M+\lambda N)-(M+\lambda N)$. On obtient $\Phi(A)(M+\lambda N) = AM - MA + \lambda(AN - NA) = \Phi(a)(M) + \lambda\Phi(A)(N)$, ce qui montre que $\Phi(A)$ est une application linéaire; comme $\Phi(A)(M) \in E$, c'est donc un endomorphisme de $E$ (ce qu'on note $\Phi(A) \in \mathcal{L}(E)$).

**2** Soit alors l'application $\Phi$ qui à $A$ (appartenant à $E$) fait correspondre l'endomorphisme $\Phi(A)$. Calculons $\Phi(A+\lambda B)$ : c'est l'endomorphisme qui à toute matrice $M$ fait correspondre la matrice $(A+\lambda B)M-M(A+\lambda B) = (AM-MA)+\lambda(BM-MB) = \Phi(A)(M)+\lambda\Phi(B)(M)$, ce qui, d'après la définition des opérations sur les endomorphismes, signifie que $\Phi(A + \lambda B) = \Phi(A) + \lambda\Phi(B)$, et donc que $\Phi$ est linéaire; on a donc $\Phi \in \mathcal{L}\big(E, \mathcal{L}(E)\big)$.

**3** On a (pour tout $M$) $\Phi(aI)(M) = aIM - M(aI) = O$, ce qui montre que l'endomorphisme $\Phi(aI)$ est l'endomorphisme nul, c'est-à-dire le vecteur nul de $\mathcal{L}(E)$; par définition, cela veut dire que $aI \in \operatorname{Ker}\Phi$.

**4** Réciproquement, soit $A \in \operatorname{Ker}\Phi$, on a donc (pour tout $M$ de $E$) $AM - MA = O$; prenant en particulier $M = M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui montre que $a = d$ et $c = 0$; de même, prenant $M = M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $b = 0$.

**5** $A$ est donc une matrice d'homothétie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI$; le résultat de la question précédente et celui-ci nous permettent donc d'affirmer que $\operatorname{Ker}\Phi = \{aI\}_{a\in\mathbf{R}} = G$. D'après la formule du rang, on a $\operatorname{rg}(\Phi) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}\Phi) = 4 - 1 = 3$, l'image $\operatorname{Im}\Phi$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3 (rappelons que $\dim(\mathcal{L}(E)) = 16$).

**6** Soit alors $D$ l'ensemble des endomorphismes $u$ de $E$ tels que (pour tout $M$ et $N$ de $E$) on ait $u(MN) = u(M)N + Mu(N)$. Si $u$ et $v$ appartiennent à $D$, on aura (pour tout $M$ et $N$) $(u + \lambda v)(MN) = u(MN) + \lambda v(MN) = u(M)N + Mu(N) + \lambda(v(M)N + Mv(N)) = (u + \lambda v)(M)N + M(u + \lambda v)(N)$, ce qui montre que $u + \lambda v$ appartiendra aussi à $D$. L'endomorphisme nul appartenant évidemment à $D$, $D$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Montrons que $\Phi(A)$ vérifie la propriété caractéristique de $D$ : on a en effet pour tout $M$ et $N$

$$\begin{aligned}\Phi(A)(MN) = AMN - MNA &= AMN - MAN + MAN - MNA \\ &= (AM - MA)N + M(AN - NA) \\ &= \Phi(A)(M)N + M\Phi(A)(N)\end{aligned}$$

Ainsi, tout endomorphisme de l'image de $\Phi$ appartient à $D$, et donc $\operatorname{Im}\Phi \subset D$.

**7** Pour tout $M$ et $N$ de $E$) on ait $u(MN) = u(M)N + Mu(N)$. Prenant $M = N = I$, on obtient en particulier $u(I) = u(I)I + Iu(I) = 2u(I)$, et donc $u(I) = O$; de même, comme $M_2.M_2 = O$, on aura $u(O) = O = M_2u(M_2) + u(M_2)M_2$; posant $u(M_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on en déduit que $\begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix} = O$, d'où on tire $z = 0$ et $t = -x$.

**8** On obtient de même $u(M_3) = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$ ; la relation $y + z = 0$ découle du calcul de $u(M_1^2) = u(M_1) = M_1 u(M_1) + u(M_1)M_1$, ce qui aboutit à $u(M_1) = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ puis de ce que $u(M_2.M_3) = u(M_1)$.

**9** Soit alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec les relations données, et donc $A = \begin{pmatrix} y+d & -t \\ -x & d \end{pmatrix}$, avec $d$ quelconque et $y = -z$. On vérifie aisément que $AM_2 - M_2A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ et que $AM_3 - M_3A = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ -y & t \end{pmatrix}$, et donc que $\Phi(A)(M_2) = u(M_2)$ et que $\Phi(A)(M_3) = u(M_3)$ ; on sait d'autre part que $M_2M_3 = M_1$, et donc que $u(M_1) = u(M_2)M_3 + u(M_3)M_2 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ x & 0 \end{pmatrix} = AM_1 - M_1A$ ; de même $u(M_4) = -u(M_1) = \Phi(A)(M_4)$. Ainsi, $u$ et $\Phi(A)$ prennent les mêmes valeurs sur les quatre matrices de la base canonique ; cela montre que $u = \Phi(A)$ (car si $f$ et $g$ sont deux applications linéaires d'un espace de dimension fini $E$ vers $F$, et si pour tous les $e_i$ d'une base de $E$, on a $f(e_i) = g(e_i)$, alors $f = g$) et donc que toute matrice $u$ de $D$ est dans l'image de $\Phi$ (puisque pour $u$ fixé, on peut évidemment déterminer un $A$ vérifiant ces conditions) ; d'après les résultats précédents, on a donc $\operatorname{Im}\Phi = D$.

**10** Les calculs précédents donnent directement les valeurs de $u(M_i) = AM_i - M_iA$ (sachant qu'ici $x = 1$, $y = 3$, $z = -3$ et $t = -2$), on en déduit la matrice de $u$ :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} ;$$

on remarquera qu'il était possible d'obtenir ce résultat sans avoir fait aucune des questions précédentes ! On sait que $\operatorname{Ker}\Phi = \{\lambda I\}$, mais ce n'est pas la question ici ! Remarquant que le rang de $U$ est 2 (on a par exemple $C_4 = -C_1$ et $C_3 = 2C_2 + 3C_1$), on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} u = 2$ (formule du rang) ; comme $I$ et $A$ sont évidemment dans le noyau, et que la famille $(I, A)$ est libre, cette famille est donc une base du plan vectoriel $\operatorname{Ker} u$. Plus aisément, les colonnes de $U$ représentant les images des $M_i$, on voit que $(u(M_4) = 2M_2 + M_3, u(M_2) = M_1 + 3M_2 - M_4)$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

**11** Cette question revient en fait à déterminer les valeurs propres de $A$ ! On pouvait la résoudre sans connaître la théorie du chapitre 19, mais il est plus simple de l'utiliser : le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$ vaut ici $P_A(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ ; les deux valeurs propres sont donc $\alpha = 2$ et $\beta = 3$, et on a bien $|\alpha - \beta| = 1$

**12** Dire que $u - \mathrm{id}_E$ et $u + \mathrm{id}_E$ ne sont pas bijectives revient à montrer que 1 et $-1$ sont valeurs propres de $u$ ; c'est-à-dire qu'il existe deux matrices non nulles $P_1$ et $P_{-1}$ telles que $u(P_1) = AP_1 - P_1A = P_1$ et que $u(P_{-1}) = AP_{-1} - P_{-1}A = -P_{-1}$. Ces matrices ne semblant pas «évidentes», on va effectuer le calcul dans la base $(M_i)$ : on doit résoudre des systèmes d'équations tels que

$$\begin{cases} y + 2z & = x \\ -2x + 3y + 2t & = y \\ -x - 3z + t & = z \\ -y - 2z & = t \end{cases},$$

avec $P_1 = xM_1 + yM_2 + zM_3 + tM_4$. On obtient $x = 2a$, $y = 4a$, $z = -a$ et $t = -2a$, donc $P_1(a) = a(2M_1 + 4M_2 - M_3 - 2M_4)$ (avec $a \neq 0$); de même, $P_{-1}(b) = b(M_1+M_2-M_3-M_4)$ est vecteur propre (avec $b \neq 0$). Les vecteurs (non nuls) $I$ et $A$ du noyau de $u$ étant propres (pour la valeur propre 0), et formant une base avec $P_1(1)$ et $P_{-1}(1)$ (comme on le vérifie aisément), on a donc diagonalisé $U$, c'est-à-dire qu'on a $P^{-1}UP = \Delta$, où $P$ est la matrice (inversible) de passage (la matrice des «vecteurs» $P_1(1)$, $P_{-1}(1)$, $I$ et $A$ dans la base $M_i$) et $\Delta$ la matrice des valeurs propres (puisque $u(V) = \lambda V$) :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$