Devoir n° 5

La fonction Beta d'Euler

On pose $\mathsf{B}(u,v) = \displaystyle\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$ (qu'Euler a appellé la fonction Beta). On précisera les valeurs de u et v pour lesquelles l'intégrale est définie, et l'on supposera que l'on est dans ce cas jusqu'à l'avant-dernière question.

1 Montrer que $\mathsf{B}(u,v) = \mathsf{B}(v,u)$ et que $\mathsf{B}(u,v) = \mathsf{B}(u,v+1) + \mathsf{B}(u+1,v)$.

2 A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $\mathsf{B}(u+1,v)$ et $\mathsf{B}(u,v)$; en déduire la valeur de $\mathsf{B}(n,p)$ pour n élément de $\mathbf{N}^*$ et l'exprimer à l'aide de factorielles quand p est également entier. Développer $x^N(1-x)^P$ par la formule de Newton et intégrer directement ; quelle propriété des coefficients binomiaux obtient-on ?

3 Calculer $\mathsf{B}(3/2,3/2)$. Utiliser les questions précédentes pour donner un sens à $(1/2)!$ (contrôler votre réponse à l'aide d'une calculette acceptant $x!$ pour x réel, ou de Maple)

4 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\,dx$ à l'aide de la fonction B (avec des u et v bien choisis). La formule ainsi obtenue est-elle définie pour tous les p et q positifs ? Expliquer cette contradiction apparente.

5 A l'aide de la question précédente, « calculer » la valeur de $I = \mathsf{B}(1/2,1/2)$. Montrer que $I = \displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{1-x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$.

6 Utiliser un raisonnement analogue pour déterminer le domaine d'existence de la fonction B^* définie par $\mathsf{B}^*(u,v) = \displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{1-x} t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$. (On pensera à encadrer par des fonctions plus simples au voisinage de 0 par exemple). Pourquoi est-ce un prolongement de B ? Montrer que B^* vérifie les relations obtenues en **1** et **2** ; les utiliser pour prolonger encore B^* à $u \le 0$ par exemple. Pensez-vous que ce prolongement corresponde encore à une intégrale ?