Devoir n° 4

La règle de l'Hospital

1 Soit deux fonctions f et g dérivables en 0, telles que $f(0) = g(0) = 0$, et que $g'(0) \neq 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = f'(0)/g'(0)$. Par changement de variable, obtenir une formule analogue (sous des hypothèses qu'on précisera) quand x tend vers a. Pourquoi la condition $f(0) = g(0) = 0$ est-elle nécessaire ? Est-ce un inconvénient en pratique ?

2 La «règle de l'Hospital» s'énonce généralement ainsi : si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$, et si f et g sont dérivables, $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Montrer que cette règle est plus générale que celle de **1**.

3 La formule des accroissements finis donne $(\exists c \in [0;x])(f'(c) = (f(x) - f(0))/x)$ (pour des x assez proches de 0). Pourquoi ne peut-on pas alors démontrer la règle de l'Hospital par un simple calcul du type $f'(c)/g'(c) = f(x)/g(x)$, suivi d'un passage à la limite ?

4 On va démontrer un résultat général, appelé la «formule des accroissements finis généralisée», et permettant le calcul précédent : Si f et g sont dérivables sur $]a,b[$ et continues sur $[a,b]$, et si $g(b) \neq g(a)$, il existe un c tel que $a < c < b$ et que

$$(\star) \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Pour démontrer ce résultat, on va d'abord construire une fonction auxiliaire h, de la forme $Af + Bg$ (A et B constantes), et telle que $h(a) = h(b)$. Montrer qu'en appliquant le lemme de Rolle à une fonction h quelconque vérifiant ces hypothèses, on peut conclure qu'il existe un c tel que $f'(c)/g'(c) = -B/A$, ou tel que $f'(c) = g'(c) = 0$. Démontrer alors la formule $(\star)$ à l'aide d'une fonction h bien choisie (on admettra que le cas $g'(c) = 0$ ne se produit pas).

5 En supposant toujours que les fonctions f et g sont dérivables sur $]a,b[$ et continues sur $[a,b]$, et en appliquant la formule précédente, montrer que si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, il en est de même de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ et qu'alors ces deux limites sont égales (on essaiera d'expliquer clairement ce qui se passe pour les «exceptions» : $g(a) = g(b)$ et $f'(c) = g'(c) = 0$) ; reformuler rigoureusement la règle de l'Hospital donnée en **2**. Y a-t-il une différence ? Donner un exemple de fonctions f et g vérifiant les hypothèses faites (en particulier $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$) et telles que $\lim\limits_a f/g$ existe, et pas $\lim\limits_a f'/g'$.

6 Il peut arriver que la limite de f'/g' soit à son tour une forme indéterminée du type «0/0» ; rédiger une «règle généralisée» utilisant les dérivées $n^{\text{èmes}}$ (on précisera les conditions nécessaires). Peut-on encore généraliser au cas où $a = +\infty$?

7 Appliquer la règle de l'Hospital (éventuellement généralisée) pour déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})}$$

8 Démontrer (par récurrence) que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}}{x^{n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Chercher une formule analogue pour une expression de la forme $(\ln(x+1) - P_n(x))/x^{n+1}$, où P_n est un polynôme de degré n que l'on déterminera.