Corrigé du devoir n° 8 (la règle de l'Hospital)

1 Si f et g sont dérivables en 0, c'est par définition que $\lim_{x\to 0}(f(x) - f(0))/(x - 0) = \lim_{x\to 0} f(x)/x = f'(0)$ et que $\lim_{x\to 0} g(x)/x = g'(0)$; on a donc $\lim_{x\to 0}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to 0}(f(x)/x) \times (x/g(x) = f'(0)/g'(0)$. Posant $X = x + a$, on en déduit que si $f(a) = g(a) = 0$, que f et g sont dérivables en a et que $g'(a) \neq 0$, on aura $\lim_{X\to a} f(X)/g(X) = f'(a)/g'(a)$. Ces calculs supposent la nullité de f et de g (et d'ailleurs, le cas général aboutirait à $\lim_{X\to a}(f(X)-f(a))/(g(X)-g(a)) = f'(a)/g'(a)$), mais ce n'est pas un problème en pratique, car si $g(a) \neq 0$, la limite de f/g est $f(a)/g(a)$, et si $g(a) = 0$ et $f(a) \neq 0$, cette limite est infinie, et ne demande que l'étude du signe de g.

2 La «règle» formulée par l'énoncé (et dont on verra la version correcte en **5**) correspond à une généralisation de la règle précédente si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ (en a), car alors si $f'(a)/g'(a)$ existe, il est égal à la limite donnée; mais on peut très bien avoir des applications de cette règle au cas où $g'(a) = 0$; ou encore où $f'(a)$ et $g'(a)$ n'existent pas, comme on le verra plus loin.

3 La formule des accroissements finis ne permet pas d'obtenir directement la règle, car le c dont elle prouve l'existence dépend de la fonction étudiée : tout ce qu'on sait, en fait, c'est qu'il existe c_1 et c_2 (compris entre 0 et x) tels que $f(x)/g(x) = f'(c_1)/g'(c_2)$, et cela ne suffit pas pour conclure (car on ne sait pas passer à la limite dans ce cas).

4 Soit h une fonction dérivable (sur $]a, b[$) telle que $h(a) = h(b) = 0$; appliquant le lemme de Rolle à la fonction $k(x) = h(x) - h(a)$, on voit que $k'(x) = h'(x)$ s'annule sur $]a, b[$. Si h est de la forme $Af + Bg$, avec $A \neq 0$, on voit qu'on aura donc (en un point c de $]a, b[$) $Af'(c) + Bg'(c) = 0$, et donc (si $g'(c) \neq 0$) $f'(c)/g'(c) = -B/A$ (et si $g'(c) = 0$, $f'(c) = 0$ également). Prenant $A = g(b)-g(a)$, et $B = f(a) - f(b)$, on vérifie aisément que $h(a) = Af(a) + Bg(a) = g(b)f(a) - g(a)f(b) = Af(b) + Bg(b) = h(b)$; le résultat précédent s'applique et on en déduit qu'il existe un c (avec $a < c < b$) tel que

$$(\star) \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ou tel que $f'(c) = g'(c) = 0$.

5 Supposons alors que la limite $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe (et vaille L, fini ou infini); la définition de Cauchy nous dit que les inégalités correspondantes (du type $|F(x) - L| < \varepsilon$) sont valables pour tout x assez proche de a, et donc pour tout c compris entre a et un de ces x. Comme la règle de l'Hospital n'a de sens que si la limite cherchée en a un, on voit que $g(x) - g(a)$ doit être non nul dans un voisinage de a, et donc que le calcul précédent s'applique (on éliminerait de même le cas $f'(c) = g'(c) = 0$ en remarquant qu'alors la limite de $f'(x)/g'(x)$ ne serait pas définie). Utilisant alors la formule $(\star)$, on en déduit que $(f(x)-f(a))/(g(x)-g(a))$ vérifie la même inégalité, et donc que $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a))/(g(x) - g(a)) = L$. En prolongeant par continuité f et g (en supposant, bien sûr, que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, sinon la question n'a pas d'intérêt, comme on l'a dit en **1**), on aboutit à la formulation exacte suivante :

Règle de l'Hospital *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, *et si* f *et* g *sont drivables au voisinage de* a, *et si* $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ *existe, alors* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$

Cette règle n'est pas tout à fait équivalente à celle énoncée en **2**; et en particulier, la première limite peut exister et pas la seconde : prenant $f(x) = x^2\sin(1/x)$ et $g(x) = x$ (et $f(0) = 0$), on sait que $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$, alors que $f'(x)/1$ n'est pas continue en 0.

6 $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ peut être à son tour une forme indéterminée (du type «0/0»), et on peut alors envisager de lui réappliquer la règle. Par récurrence, on voit que celle-ci devient : si f et g sont k fois dérivables au voisinage de a, et si $\lim_{x\to a} f^{(k)}(x)/g^{(k)}(x) = L$ (avec L fini ou infini) et si (c'est cette condition qui est le plus souvent oubliée !) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = \cdots = \lim_{x\to a} f^{(k-1)}(x) = \lim_{x\to a} g^{(k-1)}(x) = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. De même, on sait, posant $X = 1/x$, que $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = \lim_{X\to 0^+} f(1/X)/g(1/X)$, or, posant $h(X) = f(1/X)$ et $k(X) = g(1/X)$, on a $h'(X) = (-1/X^2)f'(1/X)$ et $k'(X) = (-1/X^2)g'(1/X)$; appliquant la règle de l'Hospital (généralisée) à h et k, on voit finalement que la règle précédente reste valable même si $a = +\infty$.

7 En appliquant la règle de l'Hospital précédente (en $+\infty$), on obtient (après avoir contrôlé que la limite est bien de la forme «0/0»)

$$\lim_{x\to+\infty} x(\operatorname{Arc\,tg} x - \pi/2) = \lim_{x\to+\infty} (1/(1+x^2))/(-1/x^2) = -1.$$

De même,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 0.$$

La dernière limite cherchée est de la forme «$\infty - \infty$», mais on peut écrire

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin^2 x} \times \lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{\sin x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2\sin x};\end{aligned}$$

en appliquant deux fois la règle de l'Hospital à cette dernière limite (comme on l'a vu en **6**) après avoir vérifié qu'on est bien dans un cas où la règle généralisée s'applique (c'est-à-dire qu'on obtient des formes indéterminées du type «0/0»), on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(2-x^2)\sin x + 4x\cos x}\\ &= 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{2-x^2+4(x/\sin x)\cos x} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

8 Montrons le résultat demandé par récurrence : on sait que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$; supposons que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sum_{p=0}^{k} \frac{x^p}{p!}}{x^{k+1}} = \dfrac{1}{(k+1)!}$ soit vrai pour tout $k \le n$; montrons que cette formule est alors encore vraie pour $k = n+1$. La dérivée de $e^x - \sum_{p=0}^{k} \frac{x^p}{p!}$ étant $e^x - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!}$ (comme on le vérifie aisément), les limites successives cherchées par la règle de l'Hospital (généralisée) sont toutes de la forme «0/0» (d'après l'hypothèse de récurrence) jusqu'à celle correspondant aux dérivées d'ordre $n+1$: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{(n+2)!x} = \frac{1}{(n+2)!}$; par récurrence, la formule étant vraie pour $n = 0$, elle est toujours vraie. Pour la limite correspondante à $\ln(1+x)$, il faut remarquer que $\ln(1+x)' = 1/(1+x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n x^n/(1+x)$ (comme on le voit en appliquant la formule des suites géométriques); posant $P_n(x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n/n$, on constate (la règle de l'Hospital s'applique, puisque le numérateur tend vers 0) que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(x+1) - (1 - x + x^2 - \cdots)}{(n+1)x^n},$$

et donc, d'après la remarque précédente, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$