Devoir n° 1

La méthode de Cardan

On veut résoudre l'équation «générale» du troisième degré :

$$(\star) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

(x inconnue réelle; a, b, c, d constantes réelles; a non nul).

1 Par un changement d'inconnue de la forme $X = x + A$, montrer qu'on peut se ramener à une équation de la forme :

$$(\star\star) \qquad X^3 = pX + q$$

(où p, q, et A sont des constantes, dépendant de a, b, c et d, et que l'on précisera)

Application numérique : à quoi se ramène-t-on si $(\star)$ est : $8x^3 - 24x^2 + 40x - 33 = 0$?

2 On introduit une nouvelle inconnue u telle que $X = u + \dfrac{p}{3u}$. Montrer qu'alors l'équation $(\star\star)$ se ramène à une équation de degré 6, elle-même ramenable à une équation du second degré (notée $(\star\star\star)$) à l'aide d'un nouveau changement d'inconnue. Cette équation a-t-elle toujours des solutions réelles ?

3 Étudier d'abord le cas où 0 est solution de $(\star\star\star)$. Est-ce un inconvénient en pratique ?

4 Vérifier que, lorque $(\star\star\star)$ admet deux solutions non nulles, il leur correspond une valeur unique de X, et que cette valeur est solution de $(\star\star)$. La réciproque est-elle vraie ? En définitive, risque-t-on d'introduire des solutions parasites, ou au contraire, de ne pas trouver de solutions alors qu'il en existerait (on justifiera soigneusement l'analyse) ?

5 Résoudre complètement l'équation $(\star\star)$ dans le cas : $p = -2$, $q = 9/8$. (Si vous avez utilisé une méthode différente de celle proposée en **2**, comparez les deux solutions). En déduire la solution de l'application numérique de **1** ; on remarquera éventuellement l'apparition de «formules» très compliquées, mais dont la valeur numérique semble simple; que faut-il en penser ?

6 On se propose d'étudier plus précisément l'existence (et le nombre) des solutions de $(\star\star)$. Pour cela, étudier (brièvement) les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^3 - px - q$; déterminer en particulier soigneusement la valeur des extremums (les maximums et les minimums) de f. Que peut-on conclure sur le nombre de solutions de $(\star\star)$?

7 C'est cette démarche qui a conduit, vers 1550, à la découverte des nombres complexes. Montrer comment, par exemple, dans le cas $p = 3$, $q = 0$, on est amené à des valeurs complexes de u, alors qu'il y a trois racines réelles «évidentes» ! Pouvez-vous esquisser la solution dans ce cas, en essayant de «généraliser» aux complexes la notion de racine cubique (on pourra commencer par remarquer que $(-i)^3 = i$, puis essayer de résoudre l'équation $z^3 = i$) ?