

VIII. Ensembles de nombres

Exercice 1

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n \leq 2^n$.

Exercice 2

Démontrer que le n -ième nombre entier impair est $2n - 1$.

Exercice 3

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction sinus est n fois dérivable sur \mathbb{R} et

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est un multiple de 3 alors le reste de la division euclidienne de 2^n par 7 vaut 1.

Exercice 5

$$\text{On considère la suite } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \quad n \geq 0 \end{cases}.$$

Démontrer qu'elle admet pour forme explicite $u_n = 3^n - 2^n$, $n \geq 0$.

Exercice 6

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

déterminer sa dérivée n -ième.

Exercice 7

$$\text{On considère la suite } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = (n+2)(u_n + u_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Démontrer que $n! \leq u_n \leq (n+1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)$ et $\prod_{k=0}^{k=n} 2^k$.

Exercice 9

Montrer que $(k+1)! - k! = k(k!)$, en déduire $\sum_{k=0}^{k=n} k(k!)$.

Exercice 10

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Déterminer a tel que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_n = u_n + a$, $n \in \mathbb{N}$ soit géométrique, en déduire la forme explicite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 11

Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} 2^{2k+1}$ et $\prod_{k=0}^{k=n} 2^{2k+1}$.

Exercice 12

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x$, déterminer $f([-2; 2])$ et $f^{-1}([-7; 20])$.

Exercice 13

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

Montrer que l'on peut définir $f \circ g$ et $g \circ f$ et les expliciter.

Exercice 14

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x; y) \mapsto (x+y; x-y)$ est bijective.

Exercice 15

Déterminer le nombre de surjections de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ dans $\llbracket 1; 2 \rrbracket$.

Exercice 16

Déterminer le nombre d'injections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Exercice 17

Un domino est composé de deux parties comprenant chacune un nombre entier compris entre 0 et 6. Combien y a-t-il de dominos distincts ?

Exercice 18

On appelle main un ensemble de cinq cartes. Combien existe-t-il de mains formées à partir d'un jeu de 32 cartes comprenant au moins 3 as ?

Exercice 19

Calculer la probabilité d'obtenir un carré dans une main à partir d'un jeu de 52 cartes.

Exercice 20

Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 720.

Exercice 21

On considère une table circulaire comportant $2n$ places, $n \in \mathbb{N}^*$. On désire disposer autour de cette table les $2n$ individus que constituent n couples hétérosexuels.

1. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus.
2. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus respectant l'alternance homme-femme.
3. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus ne séparant pas les couples.
4. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus ne séparant pas les couples et respectant l'alternance homme-femme.

Exercice 22

On considère la fonction $f : x \mapsto (e^x + 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est dérivable et exprimer f et f' à l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire $\sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k}$.