Réponses du devoir libre de Mathématiques n°8

(Calcul de l'erreur de la méthode des trapèzes et encadrement de la factorielle)

1. (a)
$$\begin{aligned}\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\,\mathrm{d}t &= [(t-a)(t-b)f'(t)]_a^b - \int_a^b (2t-(a+b))f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -[(2t-(a+b))f(t)]_a^b + 2\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + (a-b)(f(a)+f(b))\end{aligned}$$

   (b) On a $M(t-a)(t-b) \leqslant (t-a)(t-b)f''(t) \leqslant m(t-a)(t-b)$ pour tout $t \in [a;b]$ car $t-a \geqslant 0$ et $t-b \leqslant 0$ pour tout $t \in [a;b]$, on montre de plus que $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)\,\mathrm{d}t = \frac{(a-b)^3}{6}$.

2. On applique le résultat précédent pour $f(t) = \ln t$ avec $a = n$ et $b = n+1$ en remarquant que $f''(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ d'où $m = -1$ et $M = 0$.

3. Pour l'hérédité, on ajoute les inégalités
$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leqslant & \displaystyle\int_1^n \ln t\ \mathrm{d}t - \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}}\right) & \leqslant & \dfrac{n-1}{12}\\ \text{et}\quad 0 & \leqslant & \displaystyle\int_n^{n+1} \ln t\ \mathrm{d}t - \ln\left(\sqrt{n(n+1)}\right) & \leqslant & \dfrac{1}{12}\end{array}$$
en remarquant que $\ln\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\sqrt{n(n+1)}\right) = \ln\left(\dfrac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}}\right)$.

4. $\displaystyle\int_1^n \ln t\ \mathrm{d}t = [t\ln t]_1^n - \int_1^n t \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = n\ln n - n + 1$.

5. On en déduit $0 \leqslant n\ln n - n + 1 - \ln\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{n-1}{12}$ soit en appliquant l'exponentielle $1 \leqslant \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^{n-1}n!} \leqslant e^{\frac{n-1}{12}}$ d'où $n! \leqslant \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^{n-1}}$ et $\dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^{\frac{13}{12}(n-1)}} \leqslant n!$.