Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°6

Exercice 1 (prolongement par continuité)

1. $\mathcal{D}_f =]-1;0[\cup]0;1[$.
2. $f(-x) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire.
3. On remarque que $(1-x)^{1-\frac{1}{x}} = e^{\frac{(1-x)\ln(1-x)}{-x}}$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 3$.
4. f est impaire donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -3$.
5. On a $(1+\frac{1}{x})\ln(1+x) \underset{0}{\sim} 1$ et $(1-\frac{1}{x})\ln(1-x) \underset{0}{\sim} 1$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$.
6. $\tilde{f}(x) = \begin{cases} (1+x)^{1+\frac{1}{x}} - (1-x)^{1-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$.

Exercice 2 (étude d'une symétrie)

1. On remarque que $\dim F = 2$, $\dim G = 1$ et $F \cap G = \{0\}$.
2. On remarque que $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et que la famille $\mathcal{B} = \left(1, X, 1+X+X^2\right)$ est libre.
3. $P(X) = aX^2 + bX + c = a(1+X+X^2) + (b-a)X + (c-a)$.
4. $s(P(X)) = -a(1+X+X^2) + (b-a)X + (c-a) = -aX^2 + (b-2a)X + (c-2a)$.
5. On remarque que $P''(0) = 2a$.
6. On remarque que $\sigma \circ \sigma = Id$ d'où σ est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\sigma - Id) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P''(0) = 0\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\sigma + Id) = \mathrm{Vect}\left(1+X+X^2\right)$.

Exercice 3 (résolution d'une équation différentielle)

1. F et G contiennent la fonction nulle et sont stables par combinaisons linéaires.
2. (a) $z_0 = e^{0\times\frac{2i\pi}{3}} = 1$, $z_1 = e^{1\times\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{2\times\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (b) F est stable par combinaisons linéaires.
3. En posant $g = f + f' + f''$ on obtient $g' = g$ d'où $f(t) + f'(t) + f''(t) = \lambda e^{z_0 t}$ et $f(t) = \frac{1}{3}\lambda e^{z_0 t} + \mu e^{z_1 t} + \nu e^{z_2 t}$ donc $F \subset \mathrm{Vect}\,(f_{z_0}, f_{z_1}, f_{z_2})$.
4. $G = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^t, t \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}, t \mapsto \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}\right)$.

Exercice 4 (suite récurrente linéaire à coefficients non constants)

1. E contient la suite nulle, est stable par combinaisons linéaires et toute suite de E est uniquement déterminée par les valeurs de ses deux premiers termes u_0 et u_1.
2. $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $b_n = (n+2)(n+3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $u_n = \dfrac{2}{3}(2u_0 - u_1)\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{18}(2u_1 - u_0)(n+2)(n+3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.