Réponses du devoir libre de Mathématiques n°6

1. $\mathcal{D}_f =]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
2. (a) φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi'(x) = -\dfrac{x}{1+x} \leqslant 0$ donc $\varphi(x) \leqslant \varphi(0)$ soit $\varphi(x) \leqslant 0$.

   (b) ψ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\psi'(x) = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0$ donc $\psi(x) \geqslant \psi(0)$ soit $\psi(x) \geqslant 0$.

   (c) On en déduit que $1 - \dfrac{x}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   (d) On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$.
3. On montre que $x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \in [-\frac{1}{2};0]$, d'où pour $x \in [-\frac{1}{2};0[$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 1-x$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 1$.
4. $\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[\end{array} \right.$.
5. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.