IX. Suites

1 Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Définition 1. *On considère $E \subset \mathbb{R}$, on dit que E est :*

- majorée *s'il existe un nombre réel M appelé* **majorant** *de E tel que pour tout $x \in E$ on a $x \leqslant M$.*
- minorée *s'il existe un nombre réel m appelé* **minorant** *de E tel que pour tout $x \in E$ on a $x \geqslant m$.*
- bornée *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemple 1. *L'intervalle $[1;2[$ est majoré par 2, l'intervalle $]-\infty;3]$ n'est pas minoré.*

Remarque 1. *Si E admet un plus grand élément il est également un majorant de E.*

Contre-exemple 1. *L'ensemble $E = [0;1[$ est majoré mais n'admet pas de plus grand élément.*

Théorème 1. *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant appelé* **borne supérieure***, toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand minorant appelé* **borne inférieure***.*

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 1. *On considère les intervalles $I = [-2;3]$, $J =]-2;3[$ et $K =]-2;+\infty[$. Déterminer s'ils existent leurs plus grand élément, plus petit élement, borne supérieure et borne inférieure.*

2 Suites réelles

Définition 2. *On appelle* **suite de nombres réels** *une application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$.*

Exercice 2. *Calculer les premiers termes de la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} \ , \ n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$ puis la représenter graphiquement.*

L'ensemble $E = \{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ étant une partie de $\mathbb{R}$, on peut définir la notion de suite majorée, minorée et bornée.

Définition 3. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :*

- **majorée** *s'il existe un nombre réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant M$.*
- **minorée** *s'il existe un nombre réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geqslant m$.*
- **bornée** *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exercice 3. *Montrer que la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} \ , \ n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$ est bornée.*

Définition 4. Opérations sur les suites
Étant données deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'un nombre réel λ, on note :
- $(u_n)+(v_n)$ *la suite de terme général* u_n+v_n.
- $\lambda(u_n)$ *la suite de terme général* λu_n.
- $(u_n)\times(v_n)$ *la suite de terme général* $u_n\times v_n$.

Remarque 2. *On peut étendre la définition à la différence et au quotient si la suite au dénominateur ne s'annule pas.*

Exercice 4. *Montrer que la somme de deux suites bornées est une suite bornée.*

Définition 5. *Étant données deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $(u_n)\leqslant(v_n)$ si pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n\leqslant v_n$.*

Exercice 5. *Comparer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n=n$ et $v_n=\ln(n+1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

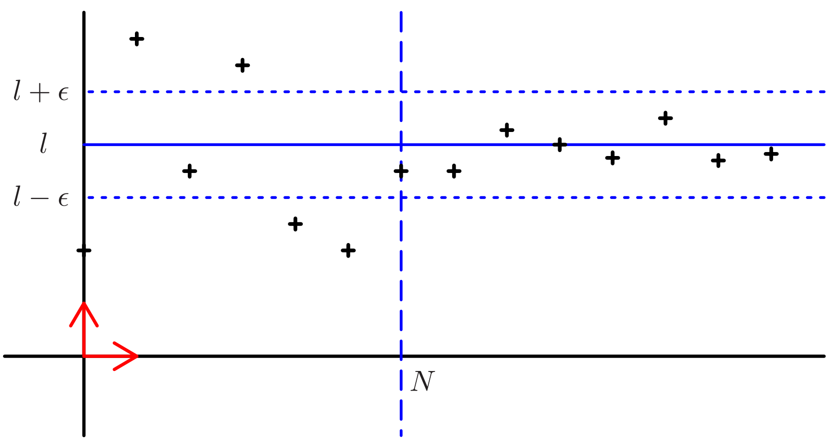
Définition 6. Sens de variation d'une suite
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :
- **constante** *si pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_{n+1}=u_n$.*
- **croissante** *(strictement croissante) si pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_{n+1}\geqslant u_n$ ($u_{n+1}>u_n$).*
- **décroissante** *(strictement décroissante) si pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_{n+1}\leqslant u_n$ ($u_{n+1}<u_n$).*
- **monotone** *si elle est croissante ou décroissante.*

Exercice 6. *Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=3n^2-2n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ en étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$ puis en étudiant la fonction $f : x\mapsto 3x^2-2x+1$.*

Exercice 7. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{n^2}{4^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et en déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

3 Limite d'une suite

Définition 7. Limite finie
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l\in\mathbb{R}$ si pour tout réel $\epsilon>0$ il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$ on a $|u_n-l|\leqslant\epsilon$, on note $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.



Remarque 3. *Le rang N dépend du ϵ choisi.*

Remarque 4. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite.*

Remarque 5. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite.*

Exercice 8. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ admet 1 pour limite. (on pourra procéder par résolution de l'inéquation $|u_n - 1| \leqslant \epsilon$ d'inconnue n)*

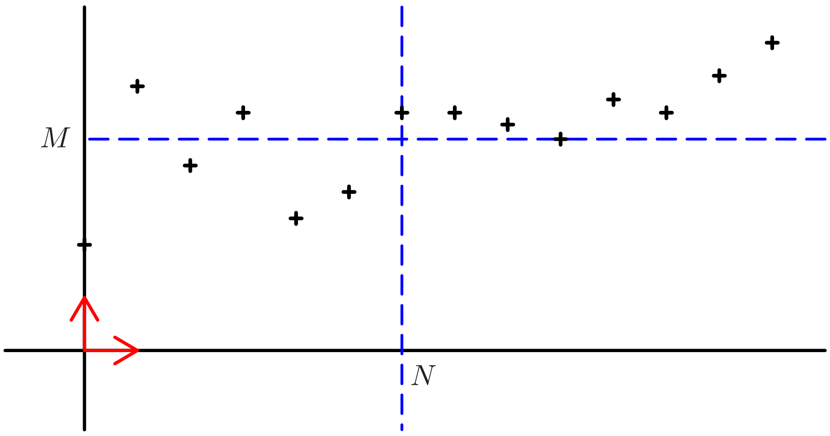
Propriété 1. *Si une suite admet une limite finie celle-ci est nécéssairement unique.*

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde en posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{|l_2 - l_1|}{3}$ et $N = \max(N_1, N_2)$. □

Définition 8. *Une suite admettant une limite finie est dite* **convergente***, une suite n'admettant pas de limite finie est dite* **divergente***.*

Exercice 9. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est divergente. (on pourra s'intéresser à la quantité $|u_{n+1} - u_n|$)*

Définition 9. Limite infinie
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si pour tout réel M il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant M$, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si pour tout réel M il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \leqslant M$, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



Remarque 6. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si la suite réelle $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.*

Exercice 10. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$.*

Propriété 2. *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Démonstration. Exigible - On fixe ϵ puis on considère $m = \min(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, l - \epsilon)$ et $M = \max(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, l + \epsilon)$. □

Contre-exemple 2. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bornée et n'est pas convergente.*

Exercice 11. *Montrer que toute suite réelle qui converge vers une limite strictement positive est minorée par un nombre strictement positif à partir d'un certain rang.*

Définition 10. *On appelle* **suite extraite** *d'une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, une suite* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où* φ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*.*

Exercice 12. *Montrer que la suite des entiers pairs et la suite des entiers impairs sont des suites extraites de la suite des entiers naturels.*

Propriété 3. *Si une suite réelle converge vers une limite finie alors toute suite extraite de celle-ci converge vers la même limite.*

Démonstration. Non exigible - On montre d'abord par récurrence que $\varphi(n) \geqslant n$. □

Exercice 13. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *est divergente.*

Propriété 4. Limites d'une suite arithmétique
On considère une suite arithmétique de raison r*, alors :*
- *si* $r > 0$ *la suite diverge vers* $+\infty$*.*
- *si* $r < 0$ *la suite diverge vers* $-\infty$*.*

Démonstration. Non exigible - On utilise la forme explicite. □

Propriété 5. Limites d'une suite géométrique
On considère une suite géométrique de raison r*, alors :*
- *si* $|r| < 1$ *la suite converge vers* 0*.*
- *si* $r > 1$ *et* $u_0 > 0$ *la suite diverge vers* $+\infty$*.*
- *si* $r > 1$ *et* $u_0 < 0$ *la suite diverge vers* $-\infty$*.*

Démonstration. Non exigible - On utilise la forme explicite. □

Exercice 14. *Une suite géométrique de raison* $r \leqslant -1$ *admet-elle une limite ?*

4 Opérations sur les limites, comparaison des limites

Propriété 6. Limites et opérations
On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui convergent respectivement vers les limites finies* l_1 *et* l_2*, alors :*
- *la suite* $(u_n) + (v_n)$ *converge vers* $l_1 + l_2$*.*
- *la suite* $(u_n) \times (v_n)$ *converge vers* $l_1 \times l_2$*.*

Démonstration. Non exigible - On remarque que $|(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| \leqslant |u_n - l_1| + |v_n - l_2|$ et que $|u_n v_n - l_1 l_2| \leqslant |(u_n - l_1)v_n| + |l_1(v_n - l_2)|$. □

Remarque 7. *On peut étendre la propriété à la différence et au quotient si la suite au dénominateur ne s'annule pas et converge vers une limite non nulle.*

Exercice 15. *On considère une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la relation de récurrence* $u_{n+1} = u_n^2 - 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, que peut-on dire de sa limite ?*

Propriété 7. *On considère une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers une limite finie* l *et une suite réelle* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui diverge vers* $+\infty$*, alors :*
- *la suite* $(u_n) + (v_n)$ *diverge vers* $+\infty$*.*
- *la suite* $(u_n) \times (v_n)$ *diverge vers* $+\infty$ *si* $l > 0$ *et vers* $-\infty$ *si* $l < 0$*.*

Démonstration. Non exigible. □

Propriété 8. *On considère deux suites rélles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui divergent vers* $+\infty$*, alors :*

- *la suite* $(u_n)+(v_n)$ *diverge vers* $+\infty$.
- *la suite* $(u_n)\times(v_n)$ *diverge vers* $+\infty$.

Démonstration. Non exigible. □

Propriété 9. *On considère une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne s'annulant pas qui diverge vers* $+\infty$ *alors la suite* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 10. *On considère une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strictement positive qui converge vers* 0 *alors la suite* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 8. *On peut également énoncer une propriété dans le cas ou la suite est strictement négative.*

Contre-exemple 3. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *converge vers* 0 *mais la suite* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'admet pas de limite infinie.*

Exercice 16. *Résumer dans des tableaux les propriétés des opérations sur les limites.*

Propriété 11. *On considère deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $u_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *qui convergent respectivement vers les limites finies* l_1 *et* l_2*, alors* $l_1 \leqslant l_2$.

Démonstration. Non exigible - On raisonne par l'absurde en posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{l_1-l_2}{3}$ et $N = \max(N_1, N_2)$. □

Exercice 17. *Si* $u_n < v_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *a-t-on* $l_1 < l_2$ *?*

5 Théorèmes d'existence de limites

Théorème 2. Théorème d'encadrement
On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, alors :*

- *si* $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et que les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers* l *alors la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l.
- *si* $u_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *alors la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$.
- *si* $u_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$ *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 18. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = n!$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *diverge vers* $+\infty$.

Corollaire 1. *On considère deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *alors la suite* $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 19. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *converge vers* 0.

Théorème 3. Théorème de convergence monotone
On considère une suite réelle croissante, alors :
- *si la suite n'est pas majorée elle diverge vers* $+\infty$.
- *si la suite est majorée elle converge vers son plus petit majorant (borne supérieure).*

Démonstration. Hors-programme - On considère la borne supérieure de l'ensemble $E = \{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. □

Exercice 20. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *est convergente et donner un encadrement de sa limite. (on pourra remarquer que* $k! \geqslant 2^{k-1}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$*)*

Corollaire 2. *On considère une suite réelle décroissante, alors :*
- *si la suite n'est pas minorée elle diverge vers* $-\infty$.
- *si la suite est minorée elle converge vers son plus grand minorant (borne inférieure).*

Démonstration. Exigible. □

Définition 11. *On appelle* **suites adjacentes** *deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et* $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Exercice 21. *Montrer que les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ *et* $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *sont adjacentes.*

Propriété 12. *Si deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes avec* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante, alors* $u_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Non exigible - On suppose par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_N$ et on remarque qu'alors $u_n - v_n \geqslant u_N - v_N$ pour tout $n \geqslant N$. □

Théorème 4. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Démonstration. Non exigible - On utilise le théorème de la limite monotone. □

6 Relations de comparaison

Définition 12. *On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que :*

- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **négligeable** *devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*
- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **équivalente** *à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*
- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **dominée** *par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n = O(v_n)$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*

Remarque 9. *Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas, ceci revient à dire que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, converge vers 0 ou converge vers 1.*

Remarque 10. *Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$.*

Remarque 11. *$u_n \sim v_n$ équivaut à $u_n - v_n = o(v_n)$.*

Exemple 2. *$n = o(n^2)$, $n+1 \sim n$ et $n \sin n = O(n)$.*

Exercice 22. *Que signifie pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $u_n = o(0)$, $u_n = o(1)$ ou que $u_n \sim l$ avec $l \in \mathbb{R}$?*

Exercice 23. *Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même signe à partir d'un certain rang.*

Propriété 13. *On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

- *si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$. (symétrie)*
- *si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$. (transitivité)*

Démonstration. Non exigible. □

Propriété 14. Équivalent d'un produit et d'un quotient
On considère quatre suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$ si les suites $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

Démonstration. Non exigible. □

Exercice 24. *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant les équivalents.*

Exercice 25. *Peut-on étendre la propriété à la somme ou à la différence de deux suites ?*

Propriété 15. Comparaison des suites de référence
On considère $a, r \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

- $\ln n = o(n^a)$
- $n^a = o(r^n)$ *si* $r > 1$.
- $r^n = o(n!)$ *si* $r > 1$.

Démonstration. Non exigible - On utilise les croissances comparées des fonctions usuelles (Chap III) et on remarque que $\dfrac{r^n}{n!} \leqslant \dfrac{r}{n} \displaystyle\prod_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} \dfrac{r}{k}$. □