I. Pratique calculatoire

1 Ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Définition 1. *Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ on dit que :*

- *x est inférieur ou égal à y ($x \leqslant y$) ou y est supérieur ou égal à x ($y \geqslant x$) si $y - x$ est un réel positif ou nul.*
- *x est inférieur strictement à y ($x < y$) ou y est supérieur strictement à x ($y > x$) si $y - x$ est un réel strictement positif.*

Exercice 1. *Comparer $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{7}{11}$.*

Propriété 1. *Les relations d'ordre $\leqslant$ et $\geqslant$ sur $\mathbb{R}$ vérifient les propriétés suivantes :*

- **Transitivité**
  pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$ (resp. si $x \geqslant y$ et $y \geqslant z$ alors $x \geqslant z$)
- **Compatibilité avec l'addition**
  pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ alors $x + z \leqslant y + z$ (resp. si $x \geqslant y$ alors $x + z \geqslant y + z$)
- **Compatibilité avec la multiplication**
  pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}_+$, si $x \leqslant y$ alors $x \times z \leqslant y \times z$ (resp. si $x \geqslant y$ alors $x \times z \geqslant y \times z$)
  pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}_-$, si $x \leqslant y$ alors $x \times z \geqslant y \times z$ (resp. si $x \geqslant y$ alors $x \times z \leqslant y \times z$)

Démonstration. Exigible. □

Remarque 1. *Les relations d'ordre sont également compatibles avec la soustraction (addition de l'opposé) et la division par un nombre non nul (multiplication par l'inverse).*

Exercice 2. *Résoudre l'inéquation $3x + 2 \leqslant 5x - 1$.*

Exercice 3. *Montrer que pour tous $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, si $x_1 \leqslant y_1$ et $x_2 \leqslant y_2$ alors $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$.*

Exercice 4. *A-t-on pour tous $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, si $0 \leqslant x_1 \leqslant y_1$ et $0 \leqslant x_2 \leqslant y_2$ alors $0 \leqslant x_1 \times x_2 \leqslant y_1 \times y_2$?*

Définition 2. Intervalles de $\mathbb{R}$
Étant donnés deux nombres réels a et b on définit :

$$
\begin{array}{rcl}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leqslant b\} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x < b\} \\
[a,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x\} \\
]a,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\} \\
]-\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leqslant b\} \\
]-\infty,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}
\end{array}
$$

Définition 3. Valeur absolue d'un nombre réel

On appelle **valeur absolue d'un réel** x : $\boxed{|x| = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x \leqslant 0 \end{cases}}$.

Remarque 2. *Pour tout réel x on a $|x| = \sqrt{x^2}$ et pour tous réels x et y on a $|xy| = |x| \times |y|$.*

Définition 4. Distance de deux nombres réels

On appelle **distance de deux réels** x *et* y : $\boxed{\mathrm{d}(x, y) = |y - x|}$.

Exercice 5. *Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $|1 - x| \leqslant 2$.*

Propriété 2. Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y, on a $\boxed{|x + y| \leqslant |x| + |y|}$.

Démonstration. Exigible - On s'intéresse aux carrés des deux membres de l'inéquation. □

2 Trinôme du second degré

Théorème 1. *L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$ admet :*

- *Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, deux solutions réelles distinctes* $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ *et* $\boxed{x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$

  de plus $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$.
- *Si $\Delta = 0$, une solution réelle double* $\boxed{x_0 = \dfrac{-b}{2a}}$ *de plus* $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2}$.
- *Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, deux solutions complexes conjuguées* $\boxed{z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$ *et* $\boxed{z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

  de plus $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. *Dresser le tableau de signes du trinôme $3x^2 + 3x - 6$.*

Exercice 7. *Déterminer le signe d'un trinôme du second degré dans le cas général.*

Exercice 8. *On considère l'équation $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.*

1. *Déterminer une racine réelle α du polynôme $x^3 + x^2 + x - 3$.*
2. *Factoriser le polynôme $x^3 + x^2 + x - 3$ par $x - \alpha$.*
3. *Résoudre l'équation $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.*

3 Calcul de limites

Propriété 3. Opérations sur les limites

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to}[u(x)+v(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	$l\neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	l'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to}[u(x)\times v(x)]$	$l\times l'$	∞	?	∞

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la multiplication.

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	$l\neq 0$	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	$l'\neq 0$	0	l'	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to} \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	∞	0	?	?

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la division.

Démonstration. Voir au chapitre XI. □

Exercice 9. *Calculer les limites en* 1 *et en* $+\infty$ *de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Théorème 2. Limite d'une composée
On désigne par les lettres α, β *et* γ *un nombre réel ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=\beta$ *et* $\lim\limits_{X\to\beta} v(X)=\gamma$ *alors* $\lim\limits_{x\to\alpha} v[u(x)]=\gamma$.

Démonstration. Voir au chapitre XI. □

Exercice 10. *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

Théorème 3. Théorème d'encadrement
On désigne par la lettre α *un nombre réel ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *et par la lettre* l *un nombre réel. Soient* u, v *et* w *trois fonctions définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *telles que* $u(x)\leqslant v(x)\leqslant w(x)$ *pour tout* $x\in I$. *Si* $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=l$ *et* $\lim\limits_{x\to\alpha} w(x)=l$ *alors* $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)=l$.

Démonstration. Voir au chapitre XI. □

Dans le cas d'une limite infinie, une seule borne est nécessaire :

Théorème 4. *On désigne par la lettre* α *un nombre réel ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$. *Soient* u *et* v *deux fonctions définies au voisinage de* α *sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.
- *Si* $u(x)\leqslant v(x)$ *pour tout* $x\in I$ *et* $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)=+\infty$.
- *Si* $u(x)\leqslant v(x)$ *pour tout* $x\in I$ *et* $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)=-\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=-\infty$.

Démonstration. Voir au chapitre XI. □

Exercice 11. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Propriété 4. Croissances comparées

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$
- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0}$

Démonstration. Non exigible - On montre que $\ln x \leqslant \sqrt{x}$ et $e^x \geqslant \frac{x^2}{2}$ pour $x > 0$. □

Corollaire 1.

- $\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0}$
- $\boxed{\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0}$

Démonstration. Exigible - On utilise la propriété 4. □

Propriété 5. *Si une fonction f est dérivable en a alors* $\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)}$.

Démonstration. Il s'agit de la définition du nombre dérivé. □

Exercice 12. *Déterminer* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

4 Calcul de dérivées et primitives

Théorème 5. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	*ensemble de définition*	*intervalle(s) de dérivabilité*	$f'(x)$
Cte	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*_-$ *et* $\mathbb{R}^*_+$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*_-$ *et* $\mathbb{R}^*_+$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^*_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$\mathbb{R}^*_+$	$\mathbb{R}^*_+$	$\frac{1}{x}$

Démonstration. Voir au chapitre XII. □

Théorème 6. **Dérivées et opérations**

- *Si* u *et* v *sont deux fonctions dérivables sur un intervalle* I *alors la fonction* $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ *est dérivable sur* I *et* $\boxed{(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I *et* k *un nombre réel alors la fonction* $ku : x \mapsto k \times u(x)$ *est dérivable sur* I *et* $\boxed{(ku)'(x) = k \times u'(x)}$.
- *Si* u *et* v *sont deux fonctions dérivables sur un intervalle* I *alors la fonction* $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ *est dérivable sur* I *et* $\boxed{(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I *ne s'annulant pas sur* I *alors la fonction* $\dfrac{1}{u} : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ *est dérivable sur* I *et* $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}}$.
- *Si* u *et* v *sont deux fonctions dérivables sur un intervalle* I *avec* v *ne s'annulant pas sur* I *alors la fonction* $\dfrac{u}{v} : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ *est dérivable sur* I *et* $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}}$.

Démonstration. Voir au chapitre XII. □

Exercice 13. *Calculer les dérivées des fonctions* $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ *et* $g : x \mapsto \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$.

Théorème 7. **Dérivée d'une composée**
Soit u *une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans un intervalle* J *et* v *une fonction définie et dérivable sur* J *alors la fonction composée* $v \circ u : x \mapsto v[u(x)]$ *est définie et dérivable sur* I *et* $\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$.

Démonstration. Voir au chapitre XII. □

Exercice 14. *Déterminer les dérivées des fonctions composées* u^2, $\dfrac{1}{u}$, $\sqrt{u}$, e^u *et* $\ln u$.

Définition 5. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *On appelle* **primitive** *de la fonction* f *sur* I *toute fonction* F *définie et dérivable sur* I *telle que* $F' = f$.

Exercice 15. *Déterminer une primitive sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.

Théorème 8. *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *et* F *une primitive de* f *sur* I. *Toute primitive de* f *sur* I *est de la forme* $F+k$ *où* $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Voir au chapitre XIV. □

Exercice 16. *Déterminer les primitives sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

5 Sommes et produits

Définition 6. Symbole somme
Étant donnés un entier naturel n non nul et n nombres $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,a_n$ réels ou complexes, on note :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \sum_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

Remarque 3. *On a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a = na$ *pour a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 17. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=5} k(k+1)$.

Exercice 18. *Simplifier* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{k=n}(k-1)^3$ *par télescopage.*

Propriété 6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 7. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et q un nombre réel différent de 1, alors* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 19. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k$ *pour $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 7. Symbole produit
Étant donnés un entier naturel n non nul et n nombres $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,a_n$ réels ou complexes, on note :

$$\boxed{\prod_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$$

Remarque 4. *On a* $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} a = a^n$ *pour a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 8. Symbole factorielle
Étant donné un entier naturel n on définit sa **factorielle** *$n!$ par :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 0! & = & 1 \\ n! & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n\ ,\ \ n > 0 \end{array}}$$

Exercice 20. *Calculer* $\dfrac{6!}{(3!)^2}$.

Définition 9. *Étant donnés deux entiers naturels n et k avec $0 \leqslant k \leqslant n$, on note* $\boxed{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$.

Exercice 21. *Calculer* $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Propriété 8. *On considère $n \in \mathbb{N}^*$, alors :*

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \ , \ 0 \leqslant k \leqslant n \\ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} \ , \ 1 \leqslant k \leqslant n-1 \end{array}}$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 22. *Construire le* **triangle de Pascal** *obtenu en plaçant les* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *dans un tableau où n représente le numéro de ligne et k le numéro de colonne. Illustrer sur ce tableau les résultats de la propriété précédente.*

Propriété 9. Formule du binôme
On considère x et y deux nombres réels ou complexes et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k}$$

Démonstration. Voir au chapitre VIII. □

Exercice 23. *Développer $(x+y)^3$, $(1+x)^4$ et $(x-y)^5$ en utilisant la formule du binôme.*

Exercice 24. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *en utilisant la formule du binôme.*

Propriété 10. *On considère x et y deux nombres réels ou complexes et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :*

$$\boxed{x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{k=n-1} x^{n-1-k} y^k}$$

Démonstration. Exigible - On développe le produit et on simplifie par télescopage. □