# III. Fonctions

## 1 Généralités sur les fonctions

**Définition 1.** *Une fonction $f$ à valeurs réelles définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ fait correspondre à tout $x \in I$ un unique réel $f(x)$ appelé* **image** *de $x$ par la fonction $f$.*

*On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*

**Définition 2.** *On appelle* **représentation graphique** *d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; f(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.*

**Exercice 1.** *Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto (x-3)^2 + 1$.*

**Exercice 2.** *Expliquer comment obtenir les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto af(x)$ et $x \mapsto f(ax)$ à partir de la représentation graphique de $f$ pour $a \in \mathbb{R}$.*

**Définition 3.** *Une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dite :*
- **paire** *si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- **impaire** *si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- **périodique** *si il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

**Exercice 3.** *Déterminer la parité des fonctions puissances $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

**Exercice 4.** *Interpréter géométriquement la parité et la périodicité d'une fonction $f$.*

**Exercice 5.** *On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(3x)$. Étudier la parité et la périodicité de la fonction $f$.*

**Définition 4.** *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dite :*
- **constante** *sur $I$ si pour tous $x, y \in I$ on a $f(x) = f(y)$.*
- **croissante** *(strictement croissante) sur $I$ si pour tous $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$ on a $f(x) \leqslant f(y)$ (avec $x < y$ on a $f(x) < f(y)$).*
- **décroissante** *(strictement décroissante) sur $I$ si pour tous $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$ on a $f(x) \geqslant f(y)$ (avec $x < y$ on a $f(x) > f(y)$).*
- **monotone** *sur $I$ si elle est croissante ou décroissante sur $I$ .*

**Exercice 6.** *Étudier le sens de variation de la fonction carré sans utiliser la dérivation.*

**Exercice 7.** *On considère $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $x \leqslant y \iff e^x \leqslant e^y$.*

**Définition 5.** *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dite :*
- **majorée** *sur $I$ si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$, $M$ est alors appelé* **majorant** *de la fonction $f$ sur $I$.*
- **minorée** *sur $I$ si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in I$, $m$ est alors appelé* **minorant** *de la fonction $f$ sur $I$.*
- **bornée** *si elle est à la fois majorée et minorée.*

**Exemple 1.** *Les fonctions* cos *et* sin *sont bornées sur $\mathbb{R}$.*

**Exercice 8.** *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.*

**Définition 6.** *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet :*

- *un* **maximum** *sur $I$ si il existe $a \in I$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in I$, $f(a)$ est alors appelé maximum de la fonction $f$ sur $I$.*
- *un* **minimum** *sur $I$ si il existe $a \in I$ tel que $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in I$, $f(a)$ est alors appelé minimum de la fonction $f$ sur $I$.*
- *un* **extremum** *sur $I$ si elle admet un maximum ou un minimum sur $I$.*

**Exemple 2.** *Les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *admettent $-1$ et $1$ comme minimum et maximum sur $\mathbb{R}$.*

**Remarque 1.** *Une fonction admettant un maximum est majorée et une fonction admettant un minimum est minorée.*

**Exercice 9.** *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ admet-elle un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}$ ?*

**Définition 7.** *On considère deux fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi que $k \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions :*

$$\begin{array}{ccccc} ku & : & x & \mapsto & ku(x) \\ u+v & : & x & \mapsto & u(x)+v(x) \\ uv & : & x & \mapsto & u(x)v(x) \\ v \circ u & : & x & \mapsto & v(u(x)) \end{array}$$

**Exercice 10.** *Exprimer à partir des fonctions $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto \sin(x)$ les fonctions $x \mapsto 1 + x^2 \sin(x)$, $x \mapsto \sin(x^2+2)$ et $x \mapsto (2\sin(x)-1)^2$.*

**Définition 8.** *Une fonction $f : I \to J$ admet une* **fonction réciproque** *$g : J \to I$ si tout élément $y \in J$ admet un unique antécédent $x \in I$ par la fonction $f$ et on note alors $g(y) = x$.*

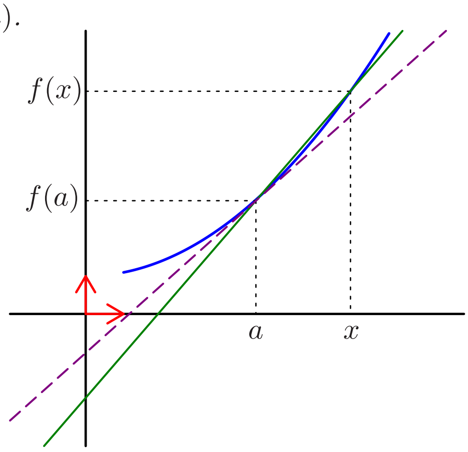
**Exercice 11.** *La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ admet-elle une fonction réciproque ?*

**Exercice 12.** *Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} ]-\infty;0] & \to & [0;+\infty[ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ admet une fonction réciproque et l'expliciter.*

**Exercice 13.** *On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quel est le lien existant entre les représentations graphiques de $f$ et de $g$ ?*

## 2 Dérivation d'une fonction

**Définition 9.** *Une fonction $f$ définie sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ est dite* **dérivable** *en $a \in I$ si le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite quand $x$ tend vers $a$, cette limite est alors appelée* **nombre dérivé** *de la fonction $f$ en $a$ et notée $f'(a)$.*




*La représentation graphique de la fonction $f$ admet alors une tangente au point de coordonnées $(x_0; f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.*

**Propriété 1.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et dérivable en $a \in I$ alors la courbe représentative de $f$ admet une tangente au point $M_0(a; f(a))$ d'équation :*

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

*Démonstration.* Exigible. □

**Exercice 14.** *Déterminer le point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ au point d'abscisse 2 avec l'axe des abscisses.*

**Propriété 2.** *On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f$ est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ avec $f'(x) \neq 0$ alors $g$ est dérivable en $y = f(x)$ et $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f' \circ g(y)}$.*

*Démonstration.* Voir au chapitre XII. □

**Exercice 15.** *Interpréter graphiquement la propriété 2.*

**Propriété 3.** *On considère une fonction $f$ à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$, alors :*
- *Si $f' = 0$ sur $I$ alors $f$ est constante sur $I$.*
- *Si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' > 0$) sur $I$ alors $f$ est croissante (respectivement strictement croissante) sur $I$.*
- *Si $f' \leqslant 0$ (respectivement $f' < 0$) sur $I$ alors $f$ est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $I$.*

*Démonstration.* Voir au chapitre XII. □

**Exercice 16.** *Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.*

# 3 Fonctions usuelles

## 3.1 Fonctions valeur absolue et partie entière

**Définition 10.** *On appelle fonction* **valeur absolue** *la fonction* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0; +\infty[ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.

**Exercice 17.** *Tracer la représentation graphique de la fonction valeur absolue.*

**Définition 11.** *On appelle fonction* **partie entière** *la fonction* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ *où $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.*

**Remarque 2.** *$\lfloor x \rfloor$ est l'unique nombre entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.*

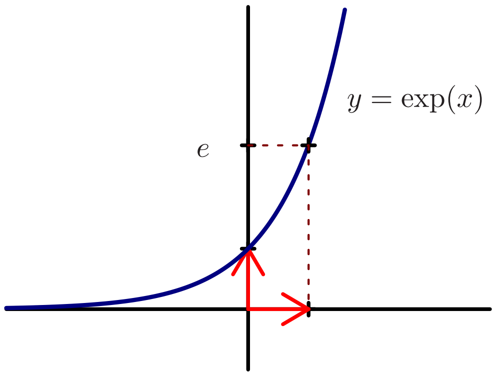
**Exercice 18.** *Déterminer $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ et $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$.*

**Exercice 19.** *Tracer la représentation graphique de la fonction partie entière.*

**Exercice 20.** *Exprimer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.*

### 3.2 Fonctions exponentielle et logarithme

**Définition 12.** *On appelle fonction* **exponentielle** *l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et valant $1$ en $0$, on la note $x \mapsto \exp(x)$ avec $e = \exp(1)$.*




**Remarque 3.** *L'existence de cette fonction est admise.*

**Remarque 4.** *La fonction $\exp$ est dérivable et $\boxed{\exp' = \exp}$.*

**Propriété 4.** *Si $u$ est une fonction dérivable, alors la fonction $\exp(u)$ est dérivable et $\boxed{(\exp(u))' = u' \exp(u)}$.*

*Démonstration.* Exigible - On utilise le théorème de dérivation d'une fonction composée. □

**Propriété 5.** *La fonction $\exp$ est croisssante et strictement positive, de plus :*

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty}$$

*Démonstration.* Non exigible - On utilise la fonction $x \mapsto \exp(x)\exp(-x)$ pour montrer que la fonction exponentielle ne s'annule pas puis un raisonnement par l'absurde pour montrer la positivité stricte, on montre que $\exp(x) \geqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour déterminer les limites. □

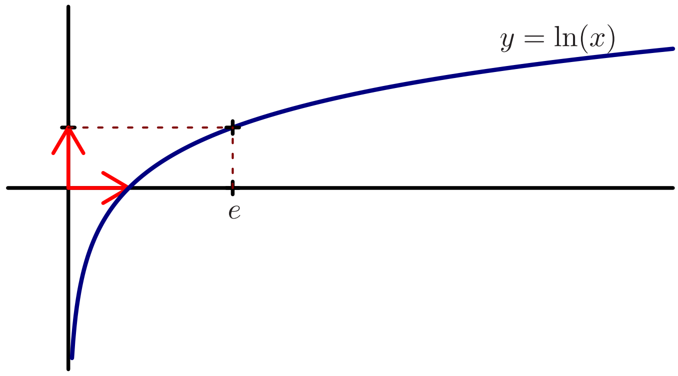
**Propriété 6.** *La fonction exponentielle vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels $x$ et $y$ et pour tout entier relatif $n$ :*

1. $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$
2. $\boxed{\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}}$
3. $\boxed{\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}}$
4. $\boxed{\exp(nx) = [\exp(x)]^n}$

*Démonstration.* Non exigible - On étudie la fonction $x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)}$. □

**Remarque 5.** *Ces formules justifient la notation $\exp(x) = e^x$.*

**Définition 13.** *On appelle fonction* **logarithme** *et on note* ln *la fonction qui à tout élément de l'intervalle* $]0;+\infty[$ *associe son unique antécédent par la fonction exponentielle dans l'intervalle* $]-\infty;+\infty[$.




**Remarque 6.** *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

**Remarque 7.** *On a* $\boxed{\ln(1) = 0}$ *et* $\boxed{\ln(e) = 1}$.

**Remarque 8.** *On a* $\boxed{\textit{Si } x \in \mathbb{R}\ ,\ \ln(e^x) = x}$ *et* $\boxed{\textit{Si } x \in ]0;+\infty[\ ,\ e^{\ln(x)} = x}$.

**Propriété 7.** *La fonction* ln *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et* $\boxed{\textit{Si } x \in ]0;+\infty[\ ,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.

*Démonstration.* Exigible - On utilise la propriété de dérivation d'une fonction réciproque. □

**Remarque 9.** *La fonction* ln *est donc la primitive sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction inverse s'annulant en* 1.

**Propriété 8.** *Si* $u$ *est une fonction dérivable et strictement positive, alors la fonction* $\ln(u)$ *est dérivable et* $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$.

*Démonstration.* Exigible. □

**Propriété 9.** *La fonction* ln *est croissante, négative sur* $]0;1]$ *et positive sur* $[1;+\infty[$*, de plus :*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty}$$

*Démonstration.* Exigible. □

**Propriété 10.** *La fonction* ln *vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels* $x$ *et* $y$ *strictement positifs et pour tout entier relatif* $n$ *:*

1. $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$
2. $\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$
3. $\boxed{\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$
4. $\boxed{\ln(x^n) = n\ln(x)}$
5. $\boxed{\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)}$

*Démonstration.* Exigible. □

### 3.3 Fonctions puissances

**Définition 14.** *On appelle* **fonction puissance d'exposant $a$** $\in \mathbb{R}$, *la fonction notée* $x \mapsto x^a$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $\boxed{x^a = e^{a \ln x}}$.

**Remarque 10.** *Cette définition généralise l'égalité* $x^n = \left(e^{\ln x}\right)^n = e^{n \ln x}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 21.** *Montrer que les fonctions* $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ *et* $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ *sont des fonctions puissances et donner leurs exposants.*

**Propriété 11.** *La fonction puissance d'exposant $a$ :* $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$, *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sa dérivée est la fonction* $x \mapsto a x^{a-1}$.

*Démonstration.* Exigible. □

**Propriété 12.** *On considère* $a \in \mathbb{R}$, *alors :*
- *Si* $a = 0$, *la fonction puissance d'exposant $a$ est constante égale à* $1$.
- *Si* $a < 0$, *la fonction puissance d'exposant $a$ est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de plus* $\lim\limits_{x \to 0} x^a = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = 0$.
- *Si* $a > 0$, *la fonction puissance d'exposant $a$ est croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de plus* $\lim\limits_{x \to 0} x^a = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$.

*Démonstration.* Exigible. □

**Remarque 11.** *La fonction puissance d'exposant* $a > 0$ *admettant une limite finie en* $0$, *on peut poser* $0^a = 0$ *pour* $a > 0$.

**Exercice 22.** *Représenter graphiquement sur une même figure les fonctions puissances d'exposants* $0$, $-1$, $1$, $2$ *et* $\dfrac{1}{2}$.

**Propriété 13.** *On considère deux nombres réels $a$ et $b$ et* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *alors :*

$$\boxed{x^a x^b = x^{a+b}} \qquad \boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}} \qquad \boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}} \qquad \boxed{\left(x^a\right)^b = x^{ab}}$$

*Démonstration.* Exigible. □

**Propriété 14.** **Croissances comparées**

- $\boxed{\textit{Si } a \in \mathbb{R}_+^*, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0}$
- $\boxed{\textit{Si } a \in \mathbb{R}_+^*, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^x} = 0}$

*Démonstration.* Non exigible - On se ramène au cas $a = 1$ en posant $X = x^a = e^{a \ln x}$ puis on remarque que $\dfrac{x^a}{e^x} = e^{x(a\frac{\ln x}{x} - 1)}$. □

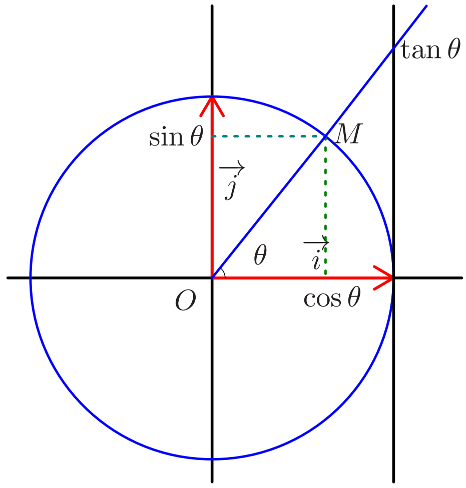
**Corollaire 1.**

$$\boxed{\textit{Si } a \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^a \ln x = 0}$$

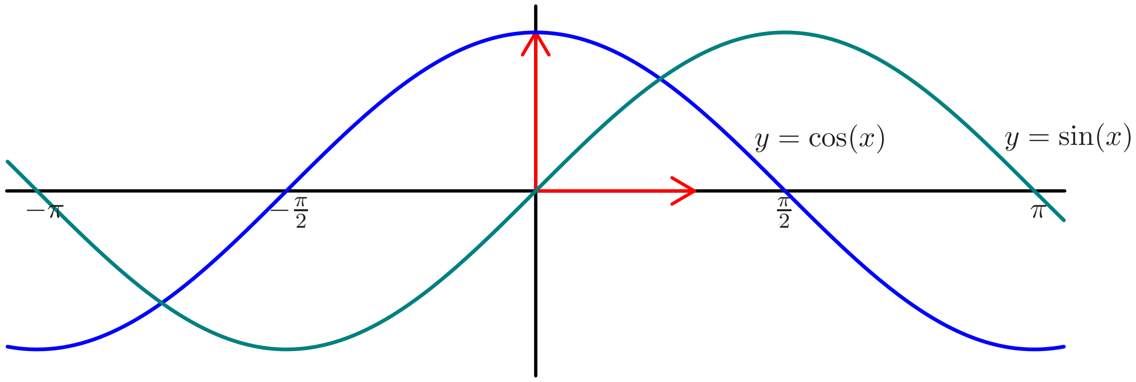
*Démonstration.* Non exigible - on utilise le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. □

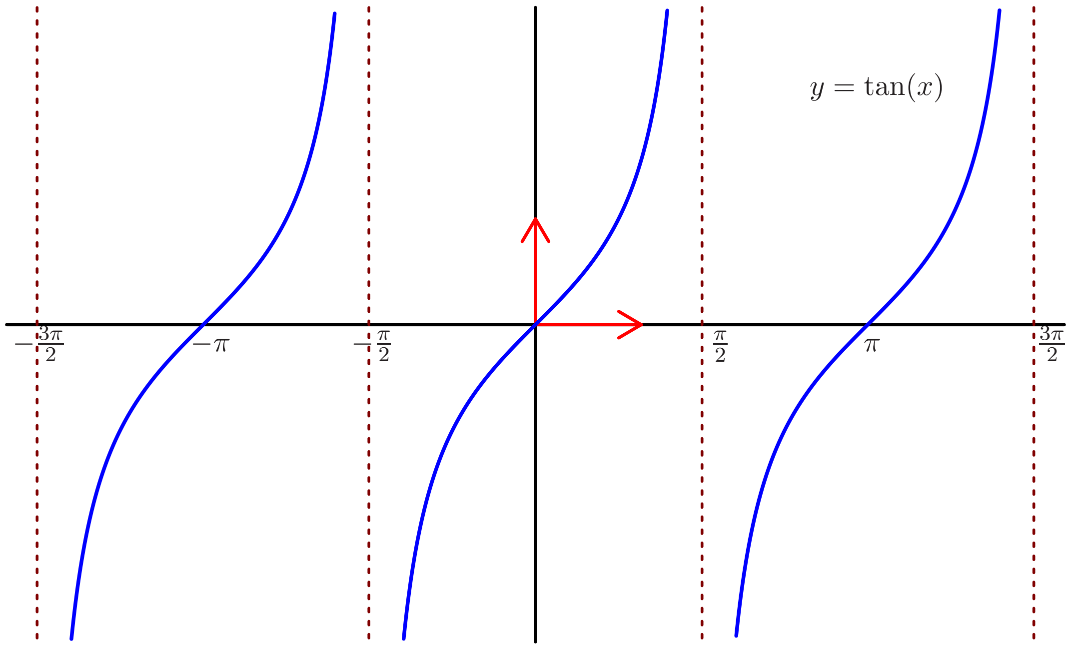
### 3.4 Fonctions circulaires directes et réciproques

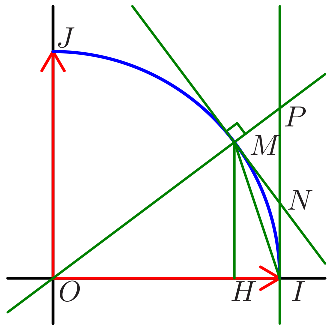
**Définition 15.** *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, on considère un point* $M$ *du cercle de centre* $O$ *et de rayon* $1$ *et on note* $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$*. La fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $[-1;1]$ *qui à* $\theta$ *associe l'abscisse du point* $M$ *est appelée fonction* **cosinus** *et est notée* $\cos$ *et la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $[-1;1]$ *qui à* $\theta$ *associe l'ordonnée du point* $M$ *est appelée fonction* **sinus** *et est notée* $\sin$*. On appelle fonction* **tangente** *et on note* $\tan$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ *par* $\boxed{\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$.




**Remarque 12.** *Les fonctions cosinus et sinus sont* $2\pi$*-périodiques et respectivement paire et impaire. La fonction tangente est impaire et* $\pi$*-périodique.*






**Propriété 15.** *On a* $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ *pour* $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

*Démonstration.* Non exigible - On utilise sur la figure ci-contre l'encadrement $MI \leqslant l(\overset{\frown}{MI}) \leqslant MN + NI$.

**Corollaire 2.** *On a* $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$. □

*Démonstration.* Non exigible - On montre que $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ pour $x \in ]0; +\frac{\pi}{2}[$ et on procède par parité puis on utilise la formule $\cos x = 1 - 2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2$. □

**Propriété 16.** *Les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\cos' = -\sin}$ , $\boxed{\sin' = \cos}$.

*Démonstration.* Non exigible - On étudie la limite pour $x$ tendant vers $a$ du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. □

**Propriété 17.** *Si* $u$ *est une fonction dérivable, alors les fonctions* $\cos u$ *et* $\sin u$ *sont dérivables et :*

$$\boxed{(\cos u)' = -u' \sin u} \qquad \boxed{(\sin u)' = u' \cos u}$$

*Démonstration.* Exigible. □

**Exercice 23.** *Montrer que la fonction* $x \mapsto \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ *est* $\pi$*-périodique et étudier ses variations sur l'intervalle* $[0; \pi]$.

**Propriété 18.** *La fonction* tan *est dérivable sur chacun des intervalles* $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ $, k \in \mathbb{Z}$ *et*

$$\boxed{Si\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\quad \tan'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2}.$$

*Démonstration.* Exigible. □

**Remarque 13.** *La fonction* tan *est donc croissante sur chacun des intervalles* $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ , $k \in \mathbb{Z}$.

**Propriété 19.** *formulaire de trigonométrie*

- $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$
  $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$
  $\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$

- $\boxed{\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2}$
  $\boxed{\sin(2x) = 2 \sin x \cos x}$
  $\boxed{\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - (\tan x)^2}}$

*Démonstration.* Exigible - les formules concernant cos et sin ont été démontrées au chapitre II. □

**Exercice 24.** *On pose* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, *montrer que* $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ *et* $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

**Définition 16.** *On appelle fonction* **arc sinus** *et on note* arcsin*, la fonction qui à tout élément de* $[-1;1]$ *associe son unique antécédent par la fonction sinus dans l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

**Remarque 14.** *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

**Remarque 15.** *On a* $\boxed{\text{Si } x \in [-1;1]\ ,\ \sin(\arcsin x) = x}$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \arcsin(\sin x) = x}$.

**Propriété 20.** *La fonction* arcsin *est impaire.*

*Démonstration.* Exigible. □

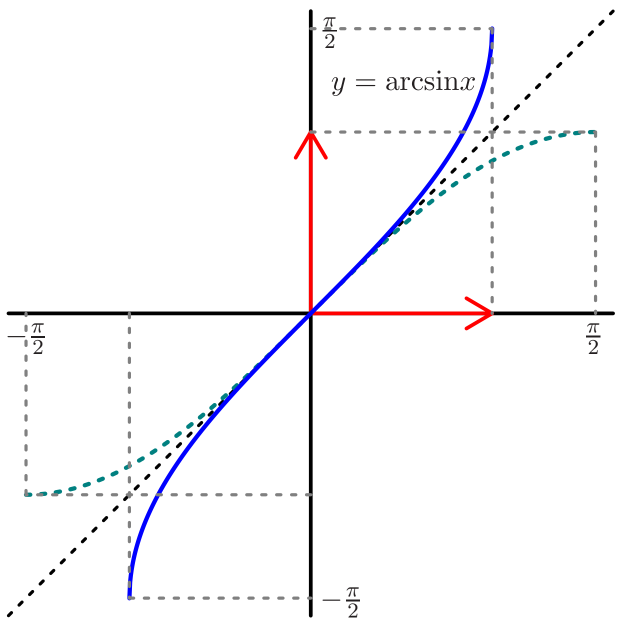
**Exercice 25.** *Calculer* $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$.

**Exercice 26.** *Démontrer que* $\boxed{\text{Si } x \in [-1;1]\ ,\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}}$.

**Propriété 21.** *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et* $\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

*Démonstration.* Exigible. □

**Remarque 16.** *La fonction* arcsin *est donc croissante sur* $[-1;1]$.




**Propriété 22.** *Si* $u$ *est une fonction dérivable à valeurs dans* $]-1;1[$*, alors la fonction* $\arcsin u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$.

*Démonstration.* Exigible. □

**Définition 17.** *On appelle fonction* **arc cosinus** *et on note* arccos *la fonction qui à tout élément de* $[-1;1]$ *associe son unique antécédent par la fonction cosinus dans l'intervalle* $[0;\pi]$.

**Remarque 17.** *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

**Remarque 18.** *On a* $\boxed{\text{Si } x \in [-1;1]\ ,\ \cos(\arccos x) = x}$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in [0;\pi]\ ,\ \arccos(\cos x) = x}$.

**Exercice 27.** *Montrer que la fonction* arccos *n'est pas paire.*

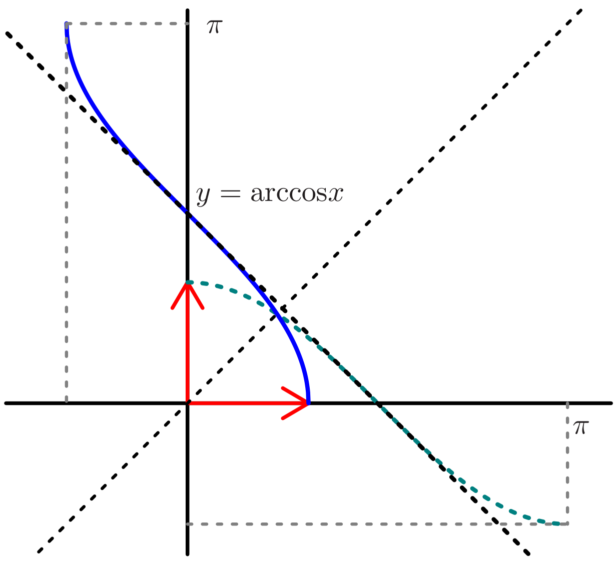
**Exercice 28.** *Calculer* $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\arccos\left(\cos\dfrac{7\pi}{5}\right)$.

**Exercice 29.** *Démontrer que* $\boxed{\text{Si } x \in [-1;1]\ ,\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}}$.

**Propriété 23.** *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et* $\boxed{\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

*Démonstration.* Exigible. □

**Remarque 19.** *La fonction* arccos *est donc décroissante sur* $[-1;1]$.




**Propriété 24.** *Si $u$ est une fonction dérivable à valeurs dans* $]-1;1[$, *alors la fonction* $\arccos u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$.

*Démonstration.* Exigible. □

**Exercice 30.** *Montrer que pour tout* $x \in [-1;1]$, *on a* $\arccos(x)+\arccos(-x) = \pi$, *en déduire une symétrie de la courbe représentative de la fonction* arccos.
*(on pourra étudier la fonction auxiliaire* $\varphi : x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$*)*

**Définition 18.** *On appelle fonction* **arc tangente** *et on note* arctan, *la fonction qui à tout élément de* $\mathbb{R}$ *associe son unique antécédent par la fonction tangente dans l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

**Remarque 20.** *L'existence de cette fonction sera démontrée au moyen du théorème de la bijection.*

**Remarque 21.** *On a* $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\arctan(x) = +\frac{\pi}{2}}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\arctan(x) = -\frac{\pi}{2}}$.

**Propriété 25.** *La fonction* arctan *est impaire.*

*Démonstration.* Exigible. □

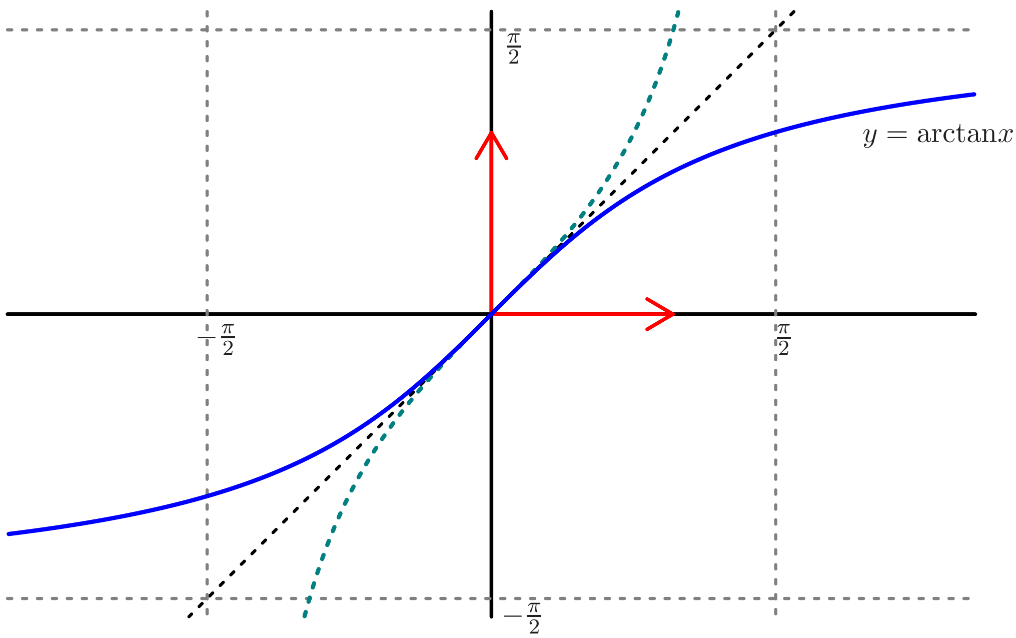
**Remarque 22.** *On a* $\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{R}\ ,\ \tan(\arctan x) = x}$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ ,\ \arctan(\tan x) = x}$.

**Exercice 31.** *Calculer* $\arctan(\sqrt{3})$ *et* $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{5}\right)$.

**Propriété 26.** *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

*Démonstration.* Exigible. □

**Remarque 23.** *La fonction* arctan *est donc croissante sur* $\mathbb{R}$.




**Propriété 27.** *Si* $u$ *est une fonction dérivable, alors la fonction* $\arctan u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}}$.

*Démonstration.* Exigible. □