Concours blanc - Mathématiques 1

(adapté de CCP 2010)

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées

* * *

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On considère la droite $\mathcal{D}$: $3\sqrt{10}x - 3\sqrt{30}y = 2$, le point $F\left(\frac{\sqrt{10}}{6}, -\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$ et l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M vérifiant l'égalité $MF = \sqrt{10}\ \mathrm{d}(M, \mathcal{D})$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole et donner son excentricité e.
2. Déterminer une équation de l'axe focal Δ de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. Montrer que $\mathcal{H}$ a pour équation $3x^2 + 13y^2 - 10\sqrt{3}xy = 2$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
4. En déduire les coordonnées des sommets S et S' de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
5. Déterminer une équation de $\mathcal{H}$ dans son repère focal.

Problème

Ce problème comporte trois parties. Les parties **A** et **B** sont indépendantes. On peut utiliser certains résultats de la partie **B** pour traiter la partie **C**.

Notations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n colonnes à coefficients réels. On note $\det(M)$ le déterminant de la matrice M.

On appelle vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ toute matrice à n lignes et 1 colonne à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définitions

On dit qu'un vecteur colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que leur somme vaut 1.

On dit qu'une matrice carrée est **stochastique** lorsque chacune de ses colonnes l'est.

Partie A (Un exemple en dimension 3)

Dans cette partie, on étudie les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2} ; z_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} :$$

$$(S) \left\{ \begin{array}{rclclcl} x_{n+1} & = & \frac{7}{10}x_n & + & \frac{2}{5}y_n & + & \frac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} & = & \frac{3}{10}x_n & & & + & \frac{1}{10}z_n \\ z_{n+1} & = & & & \frac{3}{5}y_n & + & \frac{2}{5}z_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système (S) s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.

2. Justifier que la matrice carrée A est stochastique.

3. Écrire un programme dans le langage *Maple* qui calcule le vecteur colonne X_{2012}.

4. Calculer le déterminant de A, la matrice A est-elle inversible ?

5. Déterminer les vecteurs colonnes V vérifiant l'égalité $AV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les vecteurs colonnes V vérifiant l'égalité $AV = V$.

7. Déterminer les vecteurs colonnes V vérifiant l'égalité $AV = \frac{1}{10}V$.

8. Justifier qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & -2 & \beta \end{pmatrix}$ où α et β sont des réels que l'on déterminera.

9. Calculer P^{-1}.

10. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Exprimer X_n en fonction de n.

    (b) Montrer que le vecteur colonne X_n est stochastique.

12. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n) et (z_n)) est convergente vers une limite notée l_x (respectivement l_y et l_z) que l'on déterminera.

13. Prouver que le vecteur colonne $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ est stochastique et que $AL = L$.

Partie B (Cas de la dimension 2)

Soit A une matrice carrée stochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère une suite (X_n) de vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^2$ telle que X_0 est stochastique et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

On définit deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe a et b deux réels de $[0,1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n est stochastique.

3. Montrer que $-1 \leqslant a - b \leqslant 1$.

4. (a) On suppose que $a - b = -1$.
   Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut A^2 ? Que se passe-t-il pour la suite (X_n) ?

   (b) On suppose que $a - b = 1$.
   Que vaut A ? Que se passe-t-il pour la suite (X_n) ?

   On suppose désormais que $-1 < a - b < 1$.

5. Déterminer les vecteurs colonnes V vérifiant l'égalité $AV = V$.

6. Déterminer les vecteurs colonnes V vérifiant l'égalité $AV = (a-b)V$.

7. Justifier qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Donner P et calculer P^{-1}.

8. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, x_0, a et b.

9. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n)) est convergente vers une limite notée l_x (respectivement l_y) que l'on déterminera.

10. Prouver que le vecteur colonne $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ est stochastique et que $AL = L$.

Partie C (Un cas particulier)

On reprend les notations de la partie **B**.
Dans cette partie, on suppose de plus que la matrice A n'est pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$.

2. Établir alors que $A^2 = A$.

3. Que se passe-t-il pour la suite (X_n) ?

4. On considère l'endomorphisme f du plan associé à la matrice A dans une base $\mathcal{B}$ orthonormale.
   (a) Montrer que f est un projecteur.
   (b) Déterminer une équation de $\mathrm{Ker} f$ et une équation de $\mathrm{Im} f$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) En déduire que f est une projection orthogonale si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$.