Table des matières

Chapitre 12

Suites numériques

1 Généralités sur les suites réelles

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Suite réelle).
On appelle ***suite réelle*** *toute application :*

$$\left| \begin{array}{lcl} u : \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u : n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array} \right.$$

La suite numérique est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *ou* (u_n), u_n *étant le terme général de la suite.*

Remarque.
On peut aussi définir des suites sur $\mathbf{N}^*$ ou bien sur $E = \{n \geqslant n_0, n_0 \in \mathbf{N}\}$ mais comme il existe une bijection entre E et $\mathbf{N}$, l'étude des suites définies sur $\mathbf{N}$ suffit.

Définitions 1.1 (Monotonie, suite majorée, suite minorée).
On dit qu'une suite (u_n) *est :*

(*i*) ***croissante*** *si* $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$;
(*ii*) ***strictement croissante*** *si* $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$;
(*iii*) ***constante*** *si* $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0$;
(*iv*) ***stationnaire*** *si* $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$;
(*v*) ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante ;*
(*vi*) ***majorée*** *si* $\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant M$;
(*vii*) ***bornée*** *si elle est majorée et minorée, autrement dit :*

$$\exists M \in \mathbf{R}_+,\ \forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leqslant M.$$

Exercices d'application.

1. *La suite* $\left(\mathrm{e}^{-n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *est-elle monotone ? Est-elle bornée ?*
2. *Réécrire les négations des définitions 1.1.*
3. *Est-il vrai qu'une suite décroissante est minorée ? Majorée ?*
4. *Est-il vrai qu'une suite croissante est positive à partir d'un certain rang ?*

Attention

Certaines suites ne sont ni croissantes, ni décroissantes (qui n'est pas le contraire de croissante), ni positive, ni négative (qui n'est pas le contraire de positive), ...
Prendre par exemple la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $u_n = (-1)^n$.

Définition 1.2 (Suite extraite).
*soit (u_n) une suite réelle. On dit que (v_n) est **une suite extraite** de (u_n), s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même telle que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemple 1.1.
$(u_{2n}), u_{2n+1}$ et u_{10n+1} sont des suites extraites de la suite (u_n).

Exercices d'application.

1. *Montrer qu'une suite extraite d'une suite monotone est monotone.*
2. *La réciproque est-elle vraie ?*

1.2 Opérations sur les suites

Définitions 1.2 (Somme, produit, quotient).
Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n), et $\lambda \in \mathbf{R}$. On définit les opérations suivantes :

(i) ***somme*** *de (u_n) et (v_n) la suite de terme général $u_n + v_n$;*
(ii) ***produit*** *de (u_n) et (v_n) la suite de terme général $u_n \times v_n$;*
(iii) ***produit*** *de (u_n) par un réel λ la suite de terme général λu_n;*
(iv) ***quotient*** *de (u_n) par la suite (v_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbf{N}, v_n \neq 0$, la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$.*

2 Limites d'une suite réelle

2.1 Convergence - Divergence

Définitions 2.1 (Limite finie, limite infinie).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite (u_n) admet :

(i) *pour limite $l \in \mathbf{R}$ lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} / \forall n \in \mathbf{N}, \, (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,;$$

(ii) *admet pour limite $+\infty$ lorsque :*

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} / \forall n \in \mathbf{N}, \, (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant A)\,;$$

(iii) *admet pour limite $-\infty$ lorsque :*

$$\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} / \forall n \in \mathbf{N}, \, (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant A)\,.$$

Remarques.

1. *On note* $\lim u_n = \ell$ *ou parfois* $u_n \to \ell$*, et de même pour une limite* $\pm\infty$*.*
2. $\lim u_n = -\infty \iff \lim(-u_n) = +\infty$.
3. *On raccourcit souvent la phrase logique en :*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \qquad (n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$
Noter que N *dépend de* ε *et qu'on ne peut pas échanger l'ordre du « pour tout » et du « il existe ».*
4. *L'inégalité* $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ *signifie* $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$*. On aurait aussi pu définir la limite par la phrase :* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad (n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon)$*, où l'on a remplacé la dernière inégalité large par une inégalité stricte.*

Proposition 2.1 (Valeur absolue)**.**

(i) $\lim u_n = \ell \iff \lim(u_n - \ell) = 0 \iff \lim|u_n - \ell| = 0,$
(ii) $\lim u_n = \ell \implies \lim|u_n| = |\ell|.$

Remarque.
Si (u_n) a pour limite $-\infty$ ou $+\infty$ alors $\lim|u_n| = +\infty$.
Attention : la réciproque est fausse !

Définition 2.1 (Suite convergente, suite divergente)**.**
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est* ***convergente*** *si elle admet une limite* ***finie****. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est* ***divergente****.*

Attention

Une suite divergente ne signifie pas qu'elle n'admet pas de limite.
Une suite divergente signifie qu'elle tend vers $\pm\infty$ ou bien qu'elle n'admet pas de limite.

Exemples 2.1.

1. *La suite* $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *est convergente.*
2. *Les suites* $(n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sont divergentes.*

2.2 Propriétés des suites convergentes

On va pouvoir parler de **la** limite, si elle existe, car il y a unicité de la limite :

Proposition 2.2 (Unicité de la limite)**.**
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Proposition 2.3 (Suite extraite et limite)**.**

(i) *Si* (u_n) *a pour limite* $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ *alors toute suite extraite a également pour limite* ℓ*.*
(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \iff \lim u_n = \ell.$

Remarque. La contraposée de la première assertion de cette propriété sera parfois utilisée pour démontrer qu'une suite (u_n) diverge. Ainsi, il suffit, par exemple, de déterminer 2 suites extraites de (u_n) qui ont des limites différentes.

Exemples 2.2.

1. $(u_n) = ((-1)^n)$ *est divergente.*

2. *Si* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent vers la même limite* ℓ *, montrer que* (u_n) *converge vers* ℓ.

2.3 Brève extension aux suites complexes

Définition 2.2 (Convergence d'une suite complexe)**.**
Soit (u_n) *une suite complexe, et soit* ℓ *un nombre complexe. On dit que la suite* (u_n) *converge vers* ℓ *lorsque* $|u_n - \ell| \longrightarrow 0$*, autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,;$$

Exemple 2.3. *Soit* $u_n = \dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$*,on a* $|u_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$ *d'où* (u_n) *converge vers* 0.

Proposition 2.4 (CNS de convergence d'une suite complexe)**.**
Soient (u_n) *une suite complexe et* ℓ *un nombre complexe.*

$$\lim u_n = \ell \iff \lim(\mathrm{Re}(u_n)) = \mathrm{Re}(\ell) \;\; et \;\; \lim(\mathrm{Im}(u_n)) = \mathrm{Im}(\ell).$$

Proposition 2.5 (Convergence et le caractère bornée)**.**
Toute suite convergente est bornée.

Proposition 2.6 (Produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0)**.**
Si la suite (u_n) *est bornée et* $\lim v_n = 0$ *alors* $\lim (u_n \times v_n) = 0$.

Exemple 2.4. *Si* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est la suite donnée par* $u_n = \sin(n)$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *est celle donnée par* $v_n = \dfrac{1}{n}$*, alors* $\lim (u_n v_n) = 0$.

3 Opérations sur les limites

3.1 Somme

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n + v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	on ne peut pas conclure

3.2 Produit - Quotient

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$\operatorname{sgn}(\ell)\infty$
$\ell \neq 0$	$-\infty$	$\operatorname{sgn}(-\ell)\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	on ne peut pas conclure

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0^+	$\operatorname{sgn}(\ell)\infty$
$\ell \neq 0$	0^-	$\operatorname{sgn}(-\ell)\infty$
0	0	On ne peut pas conclure
$\pm\infty$	$\pm\infty$	On ne peut pas conclure
$+\infty$	ℓ	$\operatorname{sgn}(\ell)\infty$
$-\infty$	ℓ	$\operatorname{sgn}(-\ell)\infty$

Pour le quotient, on suppose que les termes de suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

4 Limites et relation d'ordre

4.1 Passage à la limite dans une inégalité

Proposition 4.1 (Inégalité et limite).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'.

(*i*) *Si $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$), il existe $m > 0$ (resp. $m < 0$) et $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :*

$$\forall n > n_0,\ u_n \geqslant m \ (\text{resp.}\ u_n \leqslant m).$$

(*ii*) *S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant 0$, alors $\ell \geqslant 0$.*
(*iii*) *S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*

Remarque. Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant M$ (resp. $u_n \geqslant M$) et (u_n) est convergente, alors $\lim u_n \leqslant M$ (resp $\lim u_n \geqslant M$).

Attention
On ne peut pas améliorer le résultat précédent en utilisant une inégalité stricte (le passage à la limite élargit l'inégalité). Prenez pour exemple : $u_n = 1/n$.

Proposition 4.2 (Inégalité et limite infinie).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n.$$

(*i*) $\lim u_n = +\infty \implies \lim v_n = +\infty$.
(*ii*) $\lim v_n = -\infty \implies \lim u_n = -\infty$.

4.2 Existence de limite par encadrement

Voici le célèbre théorème des « gendarmes » :

Proposition 4.3 (Théorème d'encadrement).
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Alors :

$$\lim u_n = \lim w_n = \ell \implies \lim v_n = \ell.$$

Exemple 4.1. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. Étudier à l'aide d'un encadrement la convergence de (n_n).*

4.3 Conséquences de la propriété de la borne supérieure

Théorème 4.1 (Suites monotones).
Soit (u_n) une suite croissante .

(i) Si (u_n) est majorée, elle converge vers $\ell = \sup\{u_n / n \in \mathbf{N}\}$.
(ii) Si (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim u_n = +\infty$.

Remarque. Lorsque l'on majore une suite croissante par un réel M, alors la limite de cette suite est inférieure à M.

Corollaire (Suites décroissantes).
Soit (u_n) une suite décroissante :

(i) si la suite est minorée, elle converge vers $\ell = \inf\{u_n / n \in \mathbf{N}\}$;
(ii) si (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim u_n = -\infty$.

Exercices d'application.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.*Étudier la convergence de la suite (u_n) en fonction de $q \in \mathbf{R}$.*
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. *Montrer que (v_n) est convergente.*
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. *Montrer que (w_n) est convergente.*

4.4 Suites adjacentes

Définition 4.1 (Suites adjacentes).
On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont ***adjacentes*** *si :*

1. *(u_n) est croissante ;*
2. *(v_n) est décroissante ;*
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Proposition 4.4 (Convergence des suites adjacentes).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors, elles convergent vers le même réel ℓ. De plus, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

Exemple 4.2. *Soit $n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers le même réel .*

5 Suites récurrentes

5.1 Suites définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient $f : A \to A$ où $A \subset \mathbf{R}$ et $u_0 \in A$.

Proposition 5.1 (Monotonie).
Si f est croissante sur A alors (u_n) est monotone, plus précisément :

(i) si $u_0 \leqslant u_1$ alors (u_n) est croissante ;
(ii) si $u_0 \geqslant u_1$ alors (u_n) est décroissante.

Attention

Si f est décroissante sur A, la suite (u_n) n'est pas monotone.

Théorème 5.1 (Convergence).
Soit (u_n) définie par $u_0 \in A \subset \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
*Si (u_n) converge vers ℓ et f **continue** en ℓ alors ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$.*

Exemple 5.1. *Soit (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.*

5.2 Suites arithmétiques

Définition 5.1 (Suite arithmétique).
*Une suite (u_n) de $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbf{K}$ tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$, la constante r est appelée **raison** de la suite arithmétique.*

Exemple 5.2. *La suite définie par $u_n = 2n + 3$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.*

Proposition 5.2 (Terme général - Somme).
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors :

(i) le terme général de rang n est $u_n = u_0 + nr$;
(ii) la somme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right).$$

5.3 Suites géométriques

Définition 5.2 (Suite géométrique).
Une suite (u_n) de $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est dite ***géométrique*** *s'il existe $q \in \mathbf{K}$ tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$, la constante q est appelée* ***raison*** *de la suite géométrique.*

Exemple 5.3. *La suite définie par $u_n = 2^n$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.*

Proposition 5.3 (Terme général - Somme).
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors :

(i) le terme général de rang n est $u_n = u_0 \times q^n$;
(ii) la somme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

5.4 Suites arithmético-géométriques

Définition 5.3 (Suite arithmético-géométrique).
Une suite (u_n) de $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est dite ***arithmético-géométrique*** *s'il existe $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ tel que pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

Méthode

Pour calculer le terme général de la suite (u_n) :
• si $a = 1$, on reconnaît le cas d'une suite arithmétique et on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times a.$$

• si $a \neq 1$: on cherche $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$ (on a $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$) et on montre que la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a , d'où pour tout entier naturel n, on a $v_n = a^n v_0$ et par suite :

$$u_n = a^n (u_0 - \alpha) + \alpha.$$

Exemple 5.4. *Soit (u_n) définie par $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$ et $u_0 = 6$. Calculer u_n en fonction de n.*

5.5 Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 5.4 (Suite récurrente d'ordre 2).
Une suite (u_n) de $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est dite ***récurrente linéaire d'ordre 2*** *s'il existe $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ tel que pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n.$$

Définition 5.5 (Équation caractéristique)**.**
Soit (u_n) *une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_{n1}.$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ *est appelée* ***équation caractéristique*** *de la suite* (u_n)*.*

Théorème 5.2 (Terme général)**.**
Soit (u_n) *une suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 définie par*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n, \quad \textit{avec } (a, b) \in \mathbf{R}^2.$$

Si l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ *admet :*

(i) deux racines réelles distinctes r_1 *et* r_2*, alors :*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, \quad \textit{avec } (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2;$$

(ii) une racine réelle double r_0*, alors :*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (C_1 \times n + C_2)\, r_0^n, \quad \textit{avec } (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2;$$

(iii) deux racines complexes conjuguées $r_1 = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *et* $r_2 = \overline{r_1}$*, alors :*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta))\, r^n, \quad \textit{avec } (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Exemple 5.5 (Suite de Fibonacci)**.**
Soit (u_n) *définie par* $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = 0$ *et* $u_1 = 1$*. Calculer le terme général* u_n *en fonction de* n*.*