Chapitre 3

Sommes et produits

1 Sommes et produits finis

1.1 Généralités

Définition 1.1. *(Notation $\sum$ et $\prod$)*
Soit I un ensemble fini et non vide, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.
On note $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ la somme des a_i, et on note $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ leur produit.

Remarques.

— *Soient $n \in \mathbf{N}$, $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ (noté aussi $[\![0, n]\!]$) et $(n+1)$ nombres complexes notés a_0, a_1, ..., a_n. Alors :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i\in I} a_i = \prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \times a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n.$$

— *Plus généralement.*
Soient n et p deux entiers naturels, avec $p \leqslant n$, $I = \{p, p+1, p+2 \dots n-1, n\} = [\![p, n]\!]$ et $(n+1-p)$ nombres complexes notés a_p, a_{p+1}, ..., a_n. Alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i\in I} a_i = \prod_{i=p}^{n} a_i = a_p \times a_{p+1} \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n.$$

Exemples 1.1.

1. *Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} k$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{4} k$.*
2. *Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{4} k$ pour $n = 3$ puis pour n entier naturel quelconque.*

Remarque.

— Dans la somme $\sum_{k\in I} a_k$ la lettre k est un indice, cette somme ne dépend pas de k du moment que cet indice décrit I.
On dit que k est une variable « muette », c'est-à-dire on peut très bien changer de lettre sans que la somme ne change. Autrement dit :

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_j.$$

— Entre p et n il y a bien $n+1-p$ entiers.

— Ne pas confondre $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} n$.

Dans le premier cas : $\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\cdots+\ n-1\ +n.$

Dans le second cas : $\sum_{k=0}^{n} n = n+n+\cdots+n+n$ (il y a $n+1$ fois n).

— Les remarques précédentes s'appliquent aussi au produit .

Proposition 1.1.
Soit I un ensemble non vide et fini. Supposons que $I = J\cup K$ où J et K sont deux ensembles disjoints. Alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in K} a_i \qquad \textit{et} \qquad \prod_{i\in I} a_i = \prod_{i\in J} a_i \times \prod_{i\in K} a_i.$$

Remarques.

— *Soient $n, p \in \mathbf{N}$ tels que $p \leqslant n$. Si $I = [\![0,n]\!]$ (notation usuelle pour désigner l'ensemble $\{k\in \mathbf{N}\ /\ 0\leqslant k\leqslant n\}$), $J = [\![0,p]\!]$ et $K = [\![p+1,n]\!]$, alors :*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$$
$$\prod_{i=0}^{n} a_i = \prod_{i=0}^{p} a_i \times \prod_{i=p+1}^{n} a_i.$$

— *Autre cas particulier :*
Soient n un entier naturel non nul et $(2n+1)$ nombres complexes notés $a_0, a_1,\ a_2\ldots,\ a_{2n-1},\ a_{2n}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2n} a_i &= \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in K} a_i \\ &= (a_0+a_2+\ldots+a_{2n-2}+a_{2n}) + (a_1+a_3+\cdots+a_{2n-3}+a_{2n-1})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{2n} a_i &= \prod_{i\in J} a_i \times \prod_{i\in K} a_i \\ &= (a_0\times a_2\times\ldots\times a_{2n-2}\times a_{2n}) \times (a_1\times a_3\times\cdots\times a_{2n-3}\times a_{2n-1})\end{aligned}$$

avec $J = \{2p\ /\ 0\leqslant p\leqslant n\} = \{0,2,4,\ldots,2n-2,2n\}$ l'ensembles des entiers naturels pairs plus petits ou égaux à $2n$ et $K = \{2p+1\ /\ 0\leqslant p\leqslant n-1\} = \{1,3,5,\ldots,2n-3,2n-1\}$ l'ensembles des entiers naturels impairs plus petits que $2n$.

1.2 Propriétés de la somme et du produit

Proposition 1.2.
Soient I une partie non vide et finie de $\mathbf{N}$, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

(i) $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \left(\sum_{i\in I} a_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i\right)$ *et* $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda\left(\sum_{i\in I} a_i\right)$.

(ii) $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right)$ *et* $\displaystyle\prod_{i\in I}\frac{a_i}{b_i} = \frac{\displaystyle\prod_{i\in I} a_i}{\displaystyle\prod_{i\in I} b_i}$ *(si tous les b_i sont non-nuls) ;*

(iii) $\displaystyle\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i\in I} a_i$ *avec* $n = \mathrm{card}(I)$.

En particulier :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda = (n+1)\lambda \quad \text{et} \quad \prod_{i=0}^{n} \lambda = \lambda^{n+1}.$$

Attention

$$\sum_{i\in I}(a_i \times b_i) \neq \left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{i\in I} b_i\right) \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I}\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{\displaystyle\sum_{i\in I} a_i}{\displaystyle\sum_{i\in I} b_i}.$$

1.3 Changements d'indice

Proposition 1.3. *(Cas général)*
Soient I et J deux parties de $\mathbf{N}$ non vides et de même cardinal, $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et φ une bijection de J sur I. On a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\varphi(j)} = \sum_{k\in J} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} a_i = \prod_{j\in J} a_{\varphi(j)} = \prod_{k\in J} a_k.$$

Attention

Si φ **n'est pas bijective**, on n'a **ni la même somme**, **ni le même produit**, **ni même le même nombre de termes**, par exemple :

$$\underbrace{a_0 + a_1 + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n}}_{(2n+1)\ \text{termes}} = \sum_{i=0}^{2n} a_i \neq \sum_{j=0}^{n} a_{2j} = \underbrace{a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n-2} + a_{2n}}_{(n+1)\ \text{termes}},$$

ici $\varphi : J = [\![0, n]\!] \longrightarrow I = [\![0, 2n]\!]$, $\varphi : j \mapsto i = 2j$ qui bien entendu **n'est pas bijective** de J sur I.

Proposition 1.4. *(Cas particuliers)*
Sous les mêmes hypothèses que la précédente proposition avec $I = [\![p_0, n]\!]$ *et* $p_0, n, p \in \mathbf{N}$.

(i) *Translations de l'indice :* $i = j + p$ *(ou* $j = i - p$*) donnent :*

$$\sum_{i=p_0}^{n} a_i = \sum_{j=p_0-p}^{n-p} a_{j+p} \quad \text{et} \quad \prod_{i=p_0}^{n} a_i = \prod_{j=p_0-p}^{n-p} a_{j+p}.$$

(ii) *Symétries :* $i = p - j$ *(ou* $j = p - i$*) donnent :*

$$\sum_{i=p_0}^{n} a_i = \sum_{j=p-p_0}^{p-n} a_{p-j} \quad \text{et} \quad \prod_{i=p_0}^{n} a_i = \prod_{j=p-p_0}^{p-n} a_{p-j}.$$

Remarques.

— *Voici une autre situation classique avec* $I = J = [\![0, n]\!]$, *l'application* $\varphi : j \mapsto i = n - j$ *est un changement d'indice qui permet de parcourir* I *en sens contraire du sens initial et on a :*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \quad \text{et} \quad \prod_{i=0}^{n} a_i = \prod_{i=0}^{n} a_{n-i}.$$

Exemple 1.2. *Écrire autrement les sommes suivantes :* $\displaystyle\sum_{i=3}^{20} a_{i-2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$ *et* $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{n-j+1}$.

Exemple 1.3. *Simplifier la somme suivante :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} (a_{i-1} + a_i)$.

Théorème-Définition 1.1. *(Sommes et produits « télescopiques »)*
On appelle ***somme télescopique*** *(resp.* ***produit télescopique****) toute somme (resp. tout produit) de la forme :*

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i+1}) \quad \left(\text{resp.} \quad \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)\right).$$

On a :

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{n+1} \quad \left(\text{resp.} \quad \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right) = \frac{a_0}{a_{n+1}}\right).$$

Exemple 1.4. *Simplifier la somme suivante :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1})$ *pour* $n \in \mathbf{N}^*$.

Exemple 1.5. *Simplifier le produit suivant :* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)$ *pour* $n \in \mathbf{N}^*$.

1.4 Quelques sommes classiques

Proposition 1.5.
Soit n un entier naturel non nul :

(i) $1+2+\ldots+(n-1)+n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$;

(ii) $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(iii) $1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Proposition 1.6. *(Somme d'une suite arithmétique)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique, on a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\sum_{k=0}^{n} u_k=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}.$$

Plus généralement la formule est :
« nb de termes fois demi somme des termes extrêmes »

Proposition 1.7. *(Somme d'une suite géométrique)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison $q\neq 1$, on a :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\sum_{k=0}^{n} u_k=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Plus généralement la formule est :
« premier terme fois le rapport de 1 moins la raison puissance le nombre de termes sur 1 moins la raison »

En particulier :

$$\boxed{1+q+\cdots+q^n=\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ (q\neq 1).}$$

Proposition 1.8. *(Identité remarquable)*
Pour tout n entier naturel non nul, pour tous a,b complexes :

$$\begin{aligned} a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k}\,b^k. \end{aligned}$$

1.5 Somme double

Sur un rectangle

Définition 1.2.
Soient deux intervalles d'entiers $I = [\![0, n]\!]$ et $J = [\![0, p]\!]$.
Considérons la famille de complexes $(a_{i,j})_{i\in I, j\in J}$, la somme de tous les éléments de cette famille est appelée ***somme double*** *et notée* $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ *ou encore* $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$.

Nous pouvons disposer cette famille dans tableau à double entrée :

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$\dots$	$a_{0,p}$
$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,p}$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
$a_{n,0}$	$a_{n,1}$	$\dots$	$a_{n,p}$

— Quand on parcourt une ligne, c'est l'indice j qui varie de 1 à p et i qui est fixé,
— quand on parcourt une colonne, c'est l'indice i qui varie de 1 à n et j qui est fixé.

Proposition 1.9. *(Somme sur les lignes ou les colonnes)*
Sous les mêmes hypothèses que la précédente définition, on a :

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} a_{i,j}\right) \quad (\textit{ Somme sur les lignes}),$$

ou encore :

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right) \quad (\textit{Somme sur les colonnes}).$$

Proposition 1.10. *(Produit de deux sommes finies)*
Considérons les familles de complexes $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $(b_j)_{,j\in[\![0,p]\!]}$. Alors :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \times \sum_{j=0}^{p} b_j = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} a_i b_j\right) = \sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_j\right) = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}} a_i b_j.$$

Sur un triangle

Un cas particulier important est celui où est les indices appartiennent à un domaine triangulaire. Pour fixer les idées, supposons que $\Delta = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 \;/\; 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$

Nous disposons d'une famille que l'on peut disposer dans tableau à double entrée de la manière suivante :

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$\dots$	$a_{0,n}$
	$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,n}$
		$\ddots$	$\vdots$
			$a_{n,n}$

Proposition 1.11. *(Somme sur les lignes ou les colonnes)*
Sous les mêmes hypothèses que la précédente définition, on a :

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) \qquad (\textit{\textbf{Somme sur les lignes}}),$$

ou encore :

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right) \qquad (\textit{\textbf{Somme sur les colonnes}}).$$

2 Factorielle, coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Factorielle, coefficients binomiaux

Définition 2.1. *(Factorielle)*
*Soit n un entier naturel non nul, on appelle **factorielle** n (ou n factorielle) l'entier, noté $n!$:*

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

*Et on pose **par convention** : $0! = 1$*

Remarque.
Pour tout n entier naturel on a : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Exemple 2.1.
Calculer $4!$ et $\dfrac{6!}{5!}$.

Définition 2.2. *(Coefficients binomiaux)*
*Soient n un entier naturel et k un entier , on appelle **coefficient binomial** k parmi n le nombre, noté $\binom{n}{k}$:*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \text{ ou si } k < 0 \end{cases}$$

En pratique on n'utilisera que $\binom{n}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$

Exemples 2.2.

Calculer : $\binom{7}{4} =$ *Pour* $n \geqslant 1$ *:* $\binom{n}{1} =$

Pour $n \geqslant 0$ *:* $\binom{n}{0} =$ *et* $\binom{n}{n} =$ *Pour* $n \geqslant 2$ *:* $\binom{n}{2} =$

Proposition 2.1.
Pour tout entier naturel n *et* $k \in [\![0, n]\!]$ *:*

(i) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ***symétrie***

(iii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ***formule de Pascal***

Remarque. Voici une autre présentation de la **formule de Pascal** :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad (0 < k \leqslant n)}$$

Proposition 2.2.
Pour tous entiers naturels n *et* k*,* $\binom{n}{k}$ *est un entier.*

2.2 Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un algorithme permettant calculer les coefficients $\binom{n}{k}$.

- La première ligne (que l'on numérotera 0) correspond à $\binom{0}{0}$,
- la ligne suivante (numérotée 1) correspond à $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$,
- ...
- la ligne j correspond aux coefficients $\binom{j}{0}, \binom{j}{1}, \ldots, \binom{j}{j}$,
- Chaque élément de la nouvelle ligne est obtenu en ajoutant les deux nombres qui lui sont au-dessus à droite et au-dessus à gauche.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Cette construction repose sur la proposition 2.1 qui se représente ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \binom{n-1}{k-1} & + & \binom{n-1}{k} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \binom{n}{k} & \end{array}$$

On peut aussi retrouver le triangle de Pascal de la manière suivante :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne :

- placer dans la colonne 0 des 1 à chaque ligne, et des 1 à chaque entrée de la diagonale,
- en partant du haut et en descendant, compléter le triangle en ajoutant deux coefficients adjacents d'une ligne, pour produire le coefficient de la ligne inférieure, en dessous du coefficient de droite.

2.3 Formule du binôme de Newton

Théorème 2.1. *(Formule du binôme de Newton)*
Pour tout n entier naturel, et tous a, b complexes :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Autrement dit :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \times b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \times b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 \times b^n$$

Exemples 2.3.

1. *Si on choisit $a = b = 1$, on a pour tout entier naturel n :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. *Pour $n = 2$ on retrouve l'identité remarquable :* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. *Autre formule à connaître* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2.4 Lien de la définition du coefficient binomial avec celle vue au lycée

Nous allons voir dans la suite le lien entre les coefficients binomiaux définis plus haut et la définition vue au lycée.

Définition 2.3. *(Autre définition)*
Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$.

Exemple 2.4. *Les parties à deux éléments de* $\{1,2,3\}$ *sont* $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ *et* $\{2,3\}$ *et donc* $\binom{3}{2} = 3$. *Si nous classons les parties de* $\{1,2,3\}$ *par nombre d'éléments, on a*

— $\binom{3}{0} = 1$ *(la seule partie n'ayant aucun élément est l'ensemble vide),*

— $\binom{3}{1} = 3$ *(il y a 3 singletons),*

— $\binom{3}{2} = 2$ *(il y a 2 paires),*

— $\binom{3}{3} = 1$ *(la seule partie ayant 3 éléments est l'ensemble tout entier).*

Par un raisonnement combinatoire, on retrouve la proposition 2.1

Proposition 2.3.

(*i*) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.

(*ii*) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

(*iii*) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad (0 < k < n)$

Proposition 2.4. *Formule de* $\binom{n}{k}$

Pour tout entier naturel n *et* $k \in [\![0, n]\!]$ *:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$