Table des matières

Chapitre 25

Probabilités

1 Probabilité sur un univers fini

1.1 Vocabulaire

Définition 1.1 (Expérience aléatoire - Univers)**.**

(*i*) *Une **expérience aléatoire** est une épreuve pouvant avoir plusieurs issues et pour laquelle on ne peut pas dire à l'avance quelle issue sera effectivement réalisée.*

(*ii*) *L'ensemble Ω des **issues** ou des **réalisations** est appelé **univers**.*

Exemples 1.1.

On reprendra ces exemples tout au long des paragraphes I. et II..

1. *On lance un dé à 6 faces et on observe le nombre sur la face obtenue*
   Il y a 6 issues possibles, on peut modéliser l'expérience avec l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. *On lance deux dés à 6 faces et on regarde la somme des nombres des faces obtenues, il y a 11 issues possibles.*
   On peut modéliser l'expérience avec l'univers $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ *ensemble des sommes possibles.*
   On peut aussi modéliser l'expérience avec l'univers $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$ *ensembles des couples possibles.*

Dans toute la suite de ce chapitre, on se limite au cas ou l'univers Ω d'une expérience aléatoire est fini.

Définition 1.2 (Événements)**.**
Soit Ω un univers fini.

(*i*) *On appelle **évènement** un sous-ensemble de l'univers Ω. Autrement dit, c'est un ensemble d'issues de l'univers Ω.*

(*ii*) *On appelle **évènement élémentaire** un singleton de Ω.*

(*iii*) *On appelle **évènement certain** un événement qui est toujours réalisé. Il est représenté par l'univers Ω.*

(*iv*) *On appelle **évènement impossible** un événement qui n'est jamais réalisé, il est représenté par l'ensemble vide $\varnothing$.*

Exemple 1.2. *Lors d'un lancer d'un dé cubique, l'univers* $\Omega = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

« Obtenir le nombre 5 » est un évènement élémentaire qui se note $\{5\}$*.*
« Obtenir un résultat pair » est un évènement qui se note aussi $\{2, 4, 6\}$*.*
« Obtenir un résultat pair et un résultat impair » est un évènement impossible.
« Obtenir un résultat pair ou un résultat impair » est un évènement certain.

Définition 1.3 (Événement contraire)**.**
*Soit A un événement d'une expérience aléatoire. On appelle **événement contraire** de A l'événement noté $\overline{A}$ qui est réalisé lorsque A n'est pas réalisé.*

Exemple 1.3. *Lors d'un lancer d'un dé cubique, l'événement contraire de l'évènement « Obtenir un résultat pair » est l'évènement « Obtenir un résultat impair ».*

Définition 1.4 (Conjonction - Disjonction)**.**
Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire.

(i) *On appelle **conjonction** de A et B l'événement « A ou B » et on le note $A \cup B$.*
(ii) *On appelle **disjonction** de A et B l'événement « A et B » et on le note $A \cap B$.*
(iii) *Lorsque $A \cap B = \varnothing$, A et B sont dits **incompatibles**.*

Exemple 1.4.
Lors d'un lancer d'un dé cubique, si A désigne l'évènement « Obtenir un résultat pair » est B l'évènement « Obtenir un nombre plus grand que 3 ». Alors $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ et $A \cap B = \{4, 6\}$. L'évènement « Obtenir un résultat impair » et l'évènement A sont incompatibles

Définition 1.5 (Système complet)**.**
*On dit que les événements $(A_i)_{i \in I}$ (où I est un ensemble fini) forment un **système complet d'événements** si chaque A_i est non vide, s'ils sont deux à deux disjoints et si leur réunion est l'univers tout entier, autrement dit :*

(i) $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$;
(ii) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Exemple 1.5.
Lors d'un lancer d'un dé cubique, « Obtenir un résultat pair. » et « Obtenir un résultat impair. » sont deux évènements qui forment un système complet d'évènements.

1.2 Espaces probabilisés finis

Définition 1.6 (Probabilité sur un univers fini)**.**
Soit Ω un univers fini non vide.
*On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant :*

(i) $P(\Omega) = 1$.
(ii) *Si A et B sont incompatibles* $\Big(\text{i.e. } A \cap B = \varnothing\Big)$, *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

*Le couple (Ω, P) est alors appelé **espace probabilisé (fini)**.*

Proposition 1.1.
Soient (Ω, P) *un espace probabilisé fini, et* A *et* B *deux événements de* Ω*. Alors :*

(i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ***(complémentaire)***.
(ii) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ***(réunion)***
(iv) *Si* $A \subset B$ *alors* $P(A) \leqslant P(B)$ ***(croissance)***.

Proposition 1.2.
Soit (Ω, P) *un espace probabilisé fini, et* $(A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ *une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Remarque. Grâce à cette propriété on remarque que la probabilité d'un événement A est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Théorème 1.1 (Probabilité définie par les probabilités d'évènements élémentaires)**.**
Soient $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ *un univers fini, et* $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ *tels que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.
Alors, il existe une unique probabilité P *sur* $\mathscr{P}(\Omega)$ *telle que pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$, $P(\{\omega_k\}) = p_k$.
Ainsi :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\} \quad \text{et} \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

Exemple 1.6. *On peut définir, en supposant que le dé ne soit pas pipé ou mal équilibré, la probabilité* P *qui à tout* $k \in [\![1,6]\!]$ *associe* $P(\{k\}) = \frac{1}{6}$ *sur* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$*. Ainsi si l'évènement* A *est « Obtenir un nombre pair », alors* $P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} P(\{2k\}) = \frac{1}{2}$.

Théorème-Définition 1.1 (Probabilité uniforme)**.**
Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω*.*
L'application $P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ *qui à un événement* A *associe :*

$$P(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

est une probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$*, elle est appelée* ***probabilité uniforme*** *ou* ***équiprobabilité*** *sur* $\mathscr{P}(\Omega)$.

Remarque. Pour tout événement élémentaire $\omega \in \Omega$, on a $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}$.

Exemple 1.7. *Lors d'un lancer d'un non pipé, la probabilité* P *définie plus haut est uniforme sur* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Conditionnement et indépendance

Définition 2.1 (Probabilité conditionnelle)**.**
Soient (Ω, P) *un univers probabilisé fini et* $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ ***tel que*** $P(B) \neq 0$.
Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ *on appelle* ***probabilité conditionnelle de*** A ***sachant*** B*, notée* $P_B(A)$ *ou encore* $P(A|B)$*, le réel :*

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Remarque. L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Proposition 2.1.
Soient (Ω, P) *un univers probabilisé fini et* $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *tel que* $P(B) \neq 0$.
Alors : $P_B : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ *est une probabilité sur* Ω*, appelée* ***probabilité conditionnelle sachant*** B*.*

Remarques.

Lorsque A *décrit* $\mathscr{P}(\Omega)$*,* $A \cap B$ *décrit* $\mathscr{P}(B)$*.*

Autrement dit B *devient le nouvel univers « visible » lorsque l'on regarde uniquement les évènements* $A \cap B$*.*

Dans le cas particulier d'une probabilité uniforme on effectue donc une modifications des cas possibles, en terme de calcul on se ramène intuitivement à :

$$P_B(A) = \frac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card}(B)}$$ *or la définition rigoureuse nous donne :* $P_B(A) = \dfrac{\frac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card}(\Omega)}}{\frac{\operatorname{card}(B)}{\operatorname{card}(\Omega)}}$ *c'est identique.*

Exemple 2.1.

On lance deux dés à 6 faces parfaitement équilibrés et on regarde la somme des nombres des faces obtenues.

Déterminer la probabilité que le résultat soit supérieur ou égal à 6 sachant que le résultat est pair.

Théorème 2.1 (Formule des probabilités composées)**.**
Soient (Ω, P) *un espace probabilisé fini et* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geqslant 2)$ *des événements tels que* $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \neq 0$*. Alors :*

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Remarque. Cette propriété s'écrit dans le cas où $n = 3$:
Si A, B et C sont des évènements tels que $P(A \cap B \cap C) \neq 0$, alors :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B).$$

Exemple 2.2.

On achète k *tickets d'un jeu parmi les* n *restants, sachant qu'il y a* g *tickets gagnants parmi les* n*, quelle est la probabilité de l'évènement* G *: « Au moins l'un des tickets achetés est gagnant. » ?*

Théorème 2.2 (Formule des probabilités totales)**.**
Soient (Ω, P) *un espace probabilisé fini et* $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$*.*
Si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ *est un système complet d'évènements de* Ω*, de probabilités* ***strictement positives****, alors :*

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{n} P(B|A_n)P(A_n).$$

Exemple 2.3.
On tire successivement 2 cartes dans un paquet de 52 cartes parfaitement identiques.
Quelle est la probabilité que la deuxième carte tirée soit un trèfle ?

Théorème 2.3 (Formule de Bayes)**.**
Soient (Ω, P) *un espace probabilisé fini et* $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *tel que* $P(B) \neq 0$*.*

(i) *Si* $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ *tel que* $P(A) > 0$*, alors :*

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

(ii) *Si* $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ *est un système complet d'évènements de* Ω*, alors on a pour tout entier naturel* $k \in [\![1, n]\!]$ *:*

$$P_{A_k}(B) = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \times P(A_i)}.$$

2.2 Évènements indépendants

Définition 2.2 (Évènements indépendants)**.**
Soient (Ω, P) *un univers probabilisé fini*

(i) *On dit que deux évènements* A *et* B *sont* ***indépendants*** *si* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$*.*

(ii) *On dit que les événements* $(A_k)_{k \in I}$ *(*I *est un ensemble fini) sont* ***mutuellement indépendants*** *si pour tout sous-ensemble fini* $\{k_1, \cdots, k_n\}$ *extrait de* I*, on a :*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{k_i}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{k_i}).$$

Attention

Mutuellement indépendants IMPLIQUE deux à deux indépendants.
L'indépendance deux à deux n'entraîne pas toujours l'indépendance mutuelle.

Exemple 2.4.
Par exemple : on suppose qu'il y a autant de chance d'avoir une fille qu'un garçon.
Dans une famille comportant deux enfants, on considère les évènements :
A *: « La famille a un garçon et une fille »,* B *: « L'ainé est une fille »,* C *: « Le cadet est un garçon ».*
Prouver que les évènements sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Proposition 2.2.
Si A et B sont indépendants, alors :

- *les évènements contraires $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.*
- *$\bar{A}$ et B sont indépendants.*
- *A et $\bar{B}$ sont indépendants.*

Proposition 2.3. *Indépendance d'événements*
– Soient A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
(*ii*) $P(A|B) = P(A)$;
(*iii*) $P(B|A) = P(B)$.