Table des matières

Chapitre 10

Nombres réels

1 Les ensembles des nombres

1.1 L'ensemble des nombres entiers

L'ensemble des **entier naturels** $\mathbf{N}$ a été déjà présenté dans le précédent chapitre

Pour palier à l'incapacité de résoudre dans $\mathbf{N}$ toutes les équations du type : $a + x = b$ où a et b sont des entiers naturels, on construit alors l'ensemble des **entiers relatifs** que l'on note $\mathbf{Z}$.

On prolonge alors les opérations définies sur $\mathbf{N}$, en conservant toutes les propriétés et on rajoute sur $\mathbf{Z}$: toute élément a un symétrique pour l'addition. On prolonge aussi la relation d'ordre.

$\mathbf{Z}$ a alors une structure dite **d'anneau**.

1.2 L'ensemble des nombres rationnels Q

Pour palier à l'incapacité de résoudre dans $\mathbf{Z}$ toutes les équations du type : $a \times x = b$ où a et b sont des entiers, on construit alors l'ensemble des **nombres rationnels** que l'on note $\mathbf{Q}$. Par définition, l'ensemble des **nombres rationnels** est

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

On prolonge alors les opérations définies sur $\mathbf{Z}$, en conservant toutes les propriétés et on rajoute sur $\mathbf{Q}$: toute élément non nul a un symétrique pour la multiplication. On prolonge aussi la relation d'ordre.

$\mathbf{Q}$ a alors une structure dite de **corps**.

1.3 L'ensemble des nombres réels R

L'ensemble $\mathbf{Q}$ s'avère insuffisant pour beaucoup de problème d'analyse et de géométrie, par exemple $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Q}$. D'où la construction l'ensemble des **nombres réels** que l'on note $\mathbf{R}$.

Il prolonge alors les opérations, les propriétés sont conservées, la relation d'ordre aussi (nous allons revoir cela plus spécifiquement).

$\mathbf{R}$ a aussi une structure dite de corps.

2 Propriétés de R

2.1 Addition et multiplication

Ce sont les propriétés que vous avez toujours pratiquées. Pour $a, b, c \in \mathbf{R}$ on a :

$$\begin{array}{ll}
a+b=b+a & a\times b=b\times a \\
0+a=a & 1\times a=a \text{ si } a\neq 0 \\
a+b=0 \iff a=-b & ab=1 \iff a=\dfrac{1}{b} \\
(a+b)+c=a+(b+c) & (a\times b)\times c=a\times(b\times c)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a\times(b+c)=a\times b+a\times c \\
a\times b=0 \iff (a=0 \text{ ou } b=0)
\end{array}$$

On résume toutes ces propriétés en disant que :

Propriétés 2.1 (Structure de corps)**.**
*$(\mathbf{R},+,\times)$ est un **corps commutatif**.*

2.2 Ordre sur R

Définition 2.1 (Relation d'ordre)**.**

1. *La **relation** $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$ est un sous-ensemble de l'ensemble produit $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\leqslant y$ pour dire que $y-x\geqslant 0$.*
2. *Une relation $\leqslant$ est une **relation d'ordre** si*
   - *$\leqslant$ est **réflexive** : pour tout $x\in\mathbf{R}$, $x\leqslant x$,*
   - *$\leqslant$ est **antisymétrique** : pour tout $x,y\in\mathbf{R}$, $(x\leqslant y$ et $y\leqslant x) \implies x=y$,*
   - *$\leqslant$ est **transitive** : pour tout $x,y,z\in\mathbf{R}$, $(x\leqslant y$ et $y\leqslant z) \implies x\leqslant z$.*

Propriétés 2.2 (Relation d'ordre totale)**.**
*La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$ est **totale** c'est-à-dire pour tout $x,y\in\mathbf{R}$, on a :*

$$x\leqslant y \quad \textit{ou} \quad y\leqslant x.$$

*On dit aussi que $(\mathbf{R},\leqslant)$ est un **ensemble totalement ordonné**.*

Remarque. Pour $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ on a par définition :

$$\begin{array}{l}
x\leqslant y \iff y-x\in\mathbf{R}_+ \\
x<y \iff (x\leqslant y \text{ et } x\neq y)\,.
\end{array}$$

Les opérations de $\mathbf{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leqslant$ au sens suivant, pour des réels a,b,c,d :

$$\begin{array}{l}
(a\leqslant b \text{ et } c\leqslant d) \implies a+c\leqslant b+d \\
(a\leqslant b \text{ et } c\geqslant 0) \implies a\times c\leqslant b\times c \\
(a\leqslant b \text{ et } c\leqslant 0) \implies a\times c\geqslant b\times c.
\end{array}$$

2.3 Bornes supérieure et inférieure dans R

Définition 2.2.
Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbf{R}$.

- *Sous réserve d'existence, on appelle **borne supérieure** de $\mathcal{A}$ le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$.*
- *Sous réserve d'existence, on appelle **borne inférieure** de $\mathcal{A}$ le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$.*

Notons que l'on parle bien de LA borne supérieure (ou inférieure), elle est unique en tant que plus petit (ou grand) élément.

Attention
la borne supérieure (ou inférieure), si elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble !

Théorème 2.1. *(Propriété de la borne supérieure)*
Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure.

Exemples 2.1.

1. *Déterminer si $[0,1[$ admet une borne supérieure et/ou une borne inférieure, si oui le/les déterminer.*
2. *Soit $A = \{1 + \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbf{N}^*\}$. Justifier que A admet une borne supérieure et inférieure.*

Proposition 2.1 (Caractérisation d'une borne supérieure)**.**
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ et $M \in \mathbf{R}$.

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \leqslant M \end{cases}.$$

Remarque. De même, $m = \inf A \iff \begin{cases} m \text{ minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ m \leqslant x < M + \varepsilon. \end{cases}$

3 Partie entière

3.1 Généralités

Théorème-Définition 3.1 (Partie entière d'un réel)**.**
Pour tout réel x, il existe un unique entier $p \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$p \leqslant x < p + 1.$$

*L'entier p est appelé **partie entière** de x et on note $p = \mathrm{E}(x)$ ou $p = \lfloor x \rfloor$.*

Exemples 3.1. $\lfloor 3,2 \rfloor = 3$, $\lfloor -3,2 \rfloor = -4$ *et* $\lfloor 3 \rfloor = 3$

Proposition 3.1.

(i) *Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.*
(ii) *Pour $x, y \in \mathbf{R}$, $x \leqslant y \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.*

3.2 Approximation décimale à 10^{-n} près

Théorème-Définition 3.2 (Approximation décimale)**.**
Soit x un réel et n un entier. On a :

$$\lfloor x \times 10^n \rfloor \leqslant x \times 10^n < \lfloor x \times 10^n \rfloor + 1.$$

— $\lfloor x \times 10^n \rfloor 10^{-n}$ *est un* ***nombre décimal approchant par défaut*** x *à* 10^{-n}.
— $\lfloor x \times 10^n \rfloor 10^{-n} + 10^{-n}$ *est un* ***nombre décimal approchant par excès*** x *à* 10^{-n}.

Remarques.
— *On a* $\lfloor x \times 10^n \rfloor 10^{-n} \leqslant x < \lfloor x \times 10^n \rfloor 10^{-n} + 10^{-n}$.
— *Ce résultat dit que l'on peut approcher un réel quelconque d'aussi près que l'on veut par des nombres décimaux.*

Exemple 3.2. *L'écriture décimale illimitée de x récapitule toutes ces approximations :*
$\sqrt{2} = 1,41421356237...$ *signifie :*

$$\begin{array}{rcl} 2 \leqslant & \sqrt{2} & < 3 \\ 2,1 \leqslant & \sqrt{2} & < 2,2 \\ 2,41 \leqslant & \sqrt{2} & < 2,42 \\ 2,414 \leqslant & \sqrt{2} & < 2,415 \\ & \cdots & \end{array}$$