TD AL 5 : Nombres complexes

Exercice 1 **Forme algébrique**

1/ Mettre sous forme $a + \mathrm{i}\, b$ les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \dfrac{4}{1-\mathrm{i}}$,

b) $z_2 = \dfrac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^5}{(1-\mathrm{i})^9}$

2/ Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$ (avec $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$), en déduire la forme algébrique de : $z_3 = \dfrac{(1+j)^7}{j^5}$

Exercice 2 **Module et argument**

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1/ $2\sqrt{2} + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$.

2/ $\dfrac{(4-4\,\mathrm{i})^2}{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3}$.

3/ $-4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

4/ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

5/ $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

6/ $\dfrac{1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}{1-\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}$, $(\varphi \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$.

7/ $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\varphi}{1-\mathrm{i}\tan\varphi}$, $(\varphi \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$.

8/ $1 + \sin\varphi - \mathrm{i}\cos\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Exercice 3 **Module et argument**

Soient z, z' deux nombres complexes de module 1 tels que $1 + zz' \neq 0$. Montrer que $Z = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 4

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1/ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \overline{z}$.

2/ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, $f : z \mapsto |z|$.

3/ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f : z \mapsto az + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Exercice 5

Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$.

Montrer que f définie $f(z) = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ est une bijection de P vers D.

Exercice 6 **Transformation homographique**

Soit f : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-i} \end{array} \right.$

1/ Montrer que f est bijective.

2/ Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U}\setminus\{\mathrm{i}\})$, $f(\mathrm{i}\,\mathbb{R}\setminus\{\mathrm{i}\})$.

Exercice 7 **Triangle équilatéral**

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1/ $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.

2/ j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.

3/ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

4/ $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 8

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z \,\mathcal{R}\, z' \iff |z| = |z'|.$$

1/ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2/ Déterminer la classe d'équivalence de 1 et la représenter.

Exercice 9 **Configuration de points**

Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1/ $|z-1| \leqslant 4$

2/ $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

3/ $|z - 1 + 2\mathrm{i}| = 4$

4/ $\arg(z + 1 - \mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

5/ $|z-1| = |z - \mathrm{i}|$

6/ $\arg\left(\frac{\mathrm{i}-z}{2-z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

7/ ABC soit un triangle équilatéral direct avec $A(1+\mathrm{i})$, $B(4+3\mathrm{i})$ et $M(z)$.

8/ z, z^2, z^4 sont alignés.

9/ $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.

10/ $z, \dfrac{1}{z}, -\mathrm{i}$ sont alignés.

Exercice 10 **Cercle**

Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que tels que $z, 1-z$ et $1/z$ aient des images sur le même cercle de centre O.

Exercice 11 $z + 1/z = 2$

Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$.

Exercice 12 **Racines de l'unité**

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 1 = 0$.

2/ En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{3z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\dfrac{3z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\dfrac{3z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) + 1 = 0$

Exercice 13 **Racines de l'unité**

Résoudre :

1/ $(z+1)^n = (z-1)^n$.

2/ $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

3/ $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

4/ $\overline{z} = z^{n-1}$.

5/ $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\,x}{1-\mathrm{i}\,x}\right)^n = \dfrac{1+\mathrm{i}\tan a}{1-\mathrm{i}\tan a}$.

6/ $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

7/ $z^4 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

Exercice 14 **Sommes sur les racines de l'unité**

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.

Exercice 15 $e^{2i\pi/7}$

Soit $z = e^{2i\pi/7}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1/ Calculer $u+v$ et u^2.

2/ En déduire $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$.

Exercice 16 **Position des racines carrées**

Soit $z\in\mathbb{C}$ et p,q ses racines carrées. A quelle condition z,p,q forment-ils un triangle rectangle en z ?

Exercice 17 **Équations du second degré**

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1/ $z^2\sin^2 t-4z\sin t+4+\cos^2 t=0$.

2/ $(3z^2+z+1)^2+(z^2+2z+2)^2=0$

3/ $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$.

4/ $z^4-(5-14\,\mathrm{i})z^2-2(5\,\mathrm{i}+12)=0$.

5/ $z^4+6z^3+9z^2+100=0$.

Exercice 18 **Équation du second degré**

Comment faut-il choisir $m\in\mathbb{C}$ pour que l'équation : $z^2-(2+\mathrm{i}\,m)z-(1+\mathrm{i}\,m)=0$ admette deux racines imaginaires conjuguées ?

Exercice 19 **Moyennes géométrique et arithmétique**

1/ Soient $u,v\in\mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.

2/ Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha|+|\beta|=|m+\mu|+|m-\mu|$.

Exercice 20 **Transformations trigonométriques**

1/ Pour $x\in\mathbb{R}$, Linéariser $\cos^4 x.\sin^2 x$.

2/ Pour $x\in\mathbb{R}$, exprimer $\sin(5x)$ comme produit de $\sin(x)$ par un polynôme en $\cos x$.

Exercice 21 **Équation trigonométrique**

Soit $a\in\mathbb{R}$. Résoudre : $\begin{cases}\cos(a)+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0\\ \sin(a)+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0.\end{cases}$

Exercice 22 $\sum\cos^{2p}(x+k\pi/2p)$

Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

1/ Simplifier $\cos^4\theta+\cos^4(\theta+\frac{\pi}{4})+\cos^4(\theta+\frac{2\pi}{4})+\cos^4(\theta+\frac{3\pi}{4})$.

2/ Simplifier $\cos^6\theta+\cos^6(\theta+\frac{\pi}{6})+\cdots+\cos^6(\theta+\frac{5\pi}{6})$.

3/ Simplifier $\cos^{2p}\theta+\cos^{2p}(\theta+\frac{\pi}{2p})+\cdots+\cos^{2p}(\theta+\frac{(2p-1)\pi}{2p})$.

Exercice 23 $\sum\cos(kx)/\cos x^k=0$

Résoudre : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=0$.

Exercice 24 $z=(1+\mathrm{i}\,a)/(1-\mathrm{i}\,a)$

Soit $z\in\mathbb{U}$. Peut-on trouver $a\in\mathbb{R}$ tel que $z=\dfrac{1+\mathrm{i}\,a}{1-\mathrm{i}\,a}$?

$\boxed{\textbf{Exercice 25}}$ Points cocycliques

Dans le plan complexe rapporté au R.O.N.$(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $U(1), V(\mathrm{i}), M(z), M'(z'), P(zz')$ où z et z' sont 2 nombres complexes distincts et différents de 0 et de 1.

1/ Déterminer l'ensemble des points M tels que $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-1}$ soit un imaginaire pur non nul.

2/ Démontrer que M, M', P sont distincts 2 à 2 .

3/ Démontrer que $\arg \dfrac{zz'-z'}{zz'-z} = \arg \dfrac{z'}{z'-1} - \arg \dfrac{z}{z-1} \pmod{2\pi}$.

4/ En déduire que M, M', P sont alignés si et seulement si les points O, U, M, M' sont alignés ou cocycliques .