TD 20 : Intégration

Exercice 1

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbf{R}$, continue sur $[0;1]$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall x \in [0;1]$, $|f(x)| \leqslant M$.
2. En déduire une majoration de $|I_n|$, puis déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 2

À l'aide d'encadrements déterminer les limites suivantes :

1/ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{-x}^{2x} \cos(t^4)\,\mathrm{d}t$ **2/** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ **3/** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 3

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Exercice 4

1. Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $K_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(nx)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que : $|K_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, et en déduire la limite de $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$: $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{2n} \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$, et en déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 5

Déterminer la limite des suites, dont le terme général est donnée ci-dessous pour $n \geqslant 1$, en reconnaissant des sommes de Riemann :

1/ $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ **2/** $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ **3/** $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$

Exercice 6

Déterminer le domaine de définition de $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine que l'on précisera et exprimer sa dérivée.

Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

Étudier la dérivabilité, puis calculer en fonction de f la dérivée des fonctions d'expressions suivantes :

$g(x)=\int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ $h(x)=\int_{1}^{x^2} f(2t)\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ $k(x)=\int_{2}^{x} \mathrm{sh}(t)f(t^2)\,\mathrm{d}t$

Exercice 8

Étude de la fonction $F : x \longmapsto \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, avec $\varphi : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F. Montrer que F est impaire.
2. Étudier la dérivabilité de F, calculer sa dérivée et en déduire ses variations.

   (On pourra prouver que $\mathrm{sh}(2x)=2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)$ *ou utiliser la croissance de sh.)*
3. Donner la limite de F en $+\infty$.
4. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0. Tracer la courbe représentative de F.

Exercice 9

Prouver que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120} \leqslant \cos(x) \leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}$

Exercice 10

Calculer les intégrales suivantes en utilisant les techniques connues :

calcul direct, techniques spécifiques (linéarisation, ...), I.P.P. , changement de variable.

1. $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta$
2. $\int_2^{3} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^{1} \frac{1}{2t^2+3t+1}\,\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$
5. $\int_1^{\mathrm{e}} t\ln t\,\mathrm{d}t$
6. $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 11

Calculer pour $\omega > 0$:

$$K=\sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{w}}\int_0^{\frac{2\pi}{w}} \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t}$$

Et retrouver la notion d'intensité efficace pour un signal sinusoïdal. *(On aperçoit une moyenne quadratique.)*

Exercice 12

Soit

$$f(x)=\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la limite de f en 0^+.
3. Démontrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$, puis la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$.
5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
6. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.