Table des matières

Chapitre 4

Inégalités dans $\mathbb{R}$ - Généralités sur les fonctions

1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1 Opérations et relation d'ordre

Théorème 1.1. *(Rappels sur l'ordre et les inégalités.)*
Pour tous réels a, b, c, d et k :

(i) *Addition : si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.*

(ii) *Multiplication par un scalaire : si $a \leqslant b$ et* $\begin{cases} k \geqslant 0 & \text{alors } ka \leqslant kb \\ k \leqslant 0 & \text{alors } ka \geqslant kb \end{cases}$

(iii) *Multiplication d'inégalités positives : si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.*

(iv) *Division :* $\begin{cases} \text{si } 0 < a \leqslant b, & \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a} \\ \\ \text{si } a \leqslant b < 0, & \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}. \end{cases}$

Attention

- Il ne faut jamais soustraire ou diviser membre à membre les inégalités.
- Avant de multiplier ou de diviser par une constante les deux membres d'une inégalité, vérifier bien le signe de cette constante.
- Pour majorer une fraction de réels positifs, il suffit de majorer son numérateur **ou** de minorer son dénominateur.
- Pour minorer une fraction de réels positifs, il suffit de minorer son numérateur **ou** de majorer son dénominateur.

Définition 1.1.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit neuf types d'intervalles dans $\mathbb{R}$:

(i) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\}$ *intervalle fermé borné ou segment ;*
(ii) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leqslant b\}$ *intervalle semi ouvert à gauche, on définit de la même manière l'intervalle semi ouvert à droite* $[a,b[$ *;*
(iii) $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$ *intervalle ouvert ;*
(iv) $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x\}$, *on définit de la même manière les intervalles.* $]-\infty,b]$, $]a,+\infty[$ *et* $]-\infty,b[$
(v) $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$.

Remarque. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$ appelé *droite numérique achevée.*

Exemple 1.1. *Prouver que pour tout $x \in [1;3]$ on a* $\dfrac{2x-1}{x^2+9} \in \left[\dfrac{1}{18};\dfrac{1}{2}\right]$.

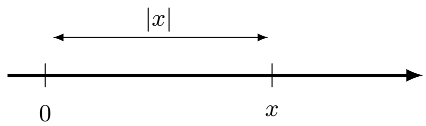
1.2 Valeur absolue

Définition 1.2.
On appelle valeur absolue *d'un réel x et on note $|x|$ le réel :*

$$|x| = \max\{x,-x\}.$$

Remarques.

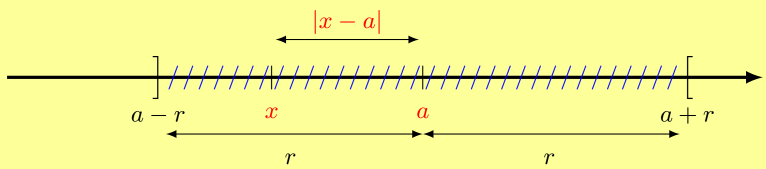
— *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ est la distance de x à 0 sur la droite réelle.*



— *pour $x \geqslant 0, |x| = x$ et pour $x \leqslant 0, |x| = -x$.*
— *On note aussi $x^+ = \max\{x,0\}$ et $x^- = \max\{0,-x\}$*

Proposition 1.1.
Pour tous $x,a \in \mathbb{R}$, $|x-a|$ est la distance entre x et a sur la droite numérique, donc pour tout $r > 0$:

$$|x-a| < r \iff a-r < x < a+r \iff x \in]a-r,a+r[.$$



Proposition 1.2.
Pour tous réels x, y :

(i) $|x| \geqslant 0$; $|-x| = |x|$; $|x| > 0 \iff x \neq 0$
(ii) $\sqrt{x^2} = |x|$
(iii) $|xy| = |x||y|$
(iv) Inégalité triangulaire :
$$\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$$
(v) Seconde inégalité triangulaire :
$$\boxed{\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|}$$

Attention

$|x-y| \nleqslant |x| - |y|$, l'inégalité triangulaire donne simplement $|x-y| \leqslant |x| + |y|$.

1.3 Majorant - Minorant

Définitions 1.1.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) *On dit qu'un réel M est un* majorant *de A si :*
$$\forall x \in A,\ x \leqslant M.$$
(ii) *On dit qu'un réel m de A est un* minorant *de A si :*
$$\forall x \in A,\ x \geqslant M.$$
(iii) *On dit que M est le* plus grand élément *de A si M est un élément de A et majorant de A, on le note* $\max A$.
(iv) *On dit que m est le* plus petit élément *de A si m est un élément de A et minorant de A, on le note* $\min A$.
(v) *On dit que A est* majorée*(resp.* minorée*) s'il existe au moins un majorant (resp. minorant) de A.*
(vi) *On dit que A est* bornée *si elle est majorée et minorée.*

2 Généralités sur les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

2.1 Domaine de définition

Définition 2.1.
Soit f une fonction réelle de la variable réelle.
*L'*ensemble de définition *de f, noté D_f, est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ est définie ou existe ou calculable.*

Exemples 2.1.
— *La fonction $x \longmapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.*
— *La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.*
— *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+6}{x-3}}$.*

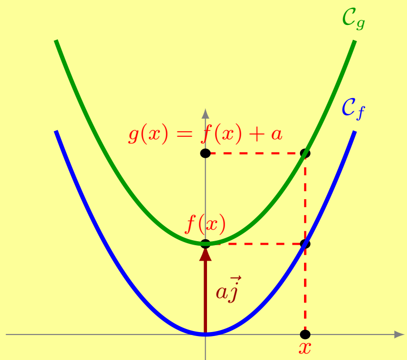
2.2 Représentation graphique d'une fonction

On se placera dans la plan muni d'un r.o.n.d. $(O;\vec{i},\vec{j})$.

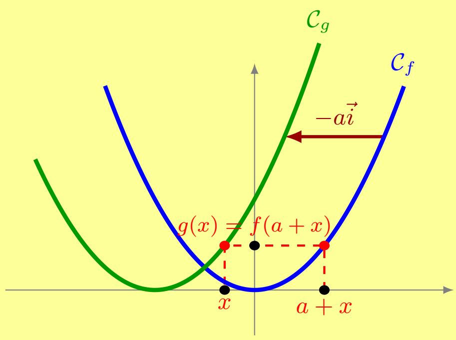
Définition 2.2.
Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles.
La représentation graphique de f est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ où x décrit D.

Proposition 2.1. *(Effet sur la courbe par translation)*
Soient f une fonction définie sur D, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soient $a \in \mathbb{R}$.
Alors :

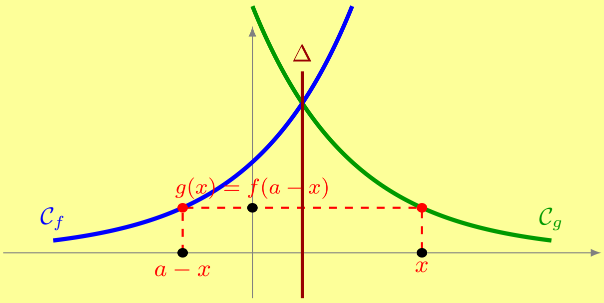
(i) *$g : x \longmapsto f(x) + a$ admet le même ensemble de définition que f.*
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $a\vec{j}$.



(ii) *$g : x \longmapsto f(x + a)$ a pour ensemble de définition $\{x/x + a \in D\}$.*
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $-a\vec{i}$.

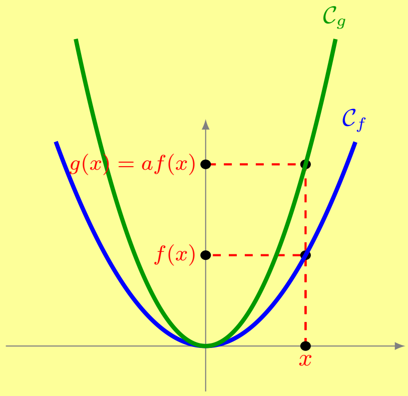


Proposition 2.2. *(Effet sur la courbe par symétrie)*
Soient f une fonction définie sur D, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soient $a \in \mathbb{R}$.
Alors :
$g : x \longmapsto f(a-x)$ a pour ensemble de définition $\{x \in \mathbb{R} / a - x \in D\}$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à la droite Δ d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.

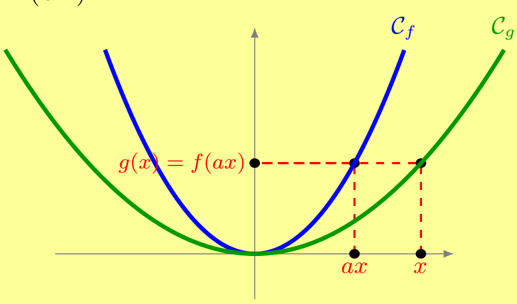


Proposition 2.3. *(Effet sur la courbe par affinité)*
Soient f une fonction définie sur D, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soient $a \in \mathbb{R}$.
Alors :

(i) *$g : x \longmapsto af(x)$ a pour ensemble de définition D.*
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}_f$ par une affinité de rapport a, parallèlement à l'axe (Oy).



(ii) *$g : x \longmapsto f(ax)$ a pour ensemble de définition $\{x \ / \ ax \in D\}$.*
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}_f$ par une affinité de rapport a, parallèlement à l'axe (Ox).



Remarque.

- L'affinité de rapport $a = -1$, parallèlement à l'axe (Oy) correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- L'affinité de rapport $a = -1$, parallèlement à l'axe (Ox) correspond à la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercices d'application.
*Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de définition et tracer une esquisse de sa représentation graphique **à partir** de ceux d'une fonction bien connue et de transformations affines .*

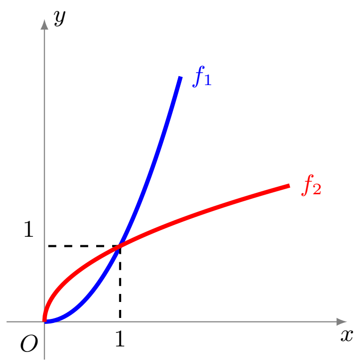
1. $f : x \mapsto (x+2)^2 - 1$
2. $f : x \mapsto 1 - \sqrt{4-x}$
3. $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{1-x}$
4. $f : x \mapsto 3\cos(2t + \pi/4)$

2.3 Ordre

Définition 2.3. *(Relation d'ordre sur les fonctions.)*
Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D.
On dit que f est inférieure ou égale *à g (sur D) lorsque pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leqslant g(x)$.*

Remarque.
Ce n'est pas une relation d'ordre « totale », autrement dit toutes les fonctions ne sont pas comparables.

Exemple 2.2.
Les fonctions $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ sont comparables sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}_+$.



Définitions 2.1. *(Vocabulaire lié à l'ordre.)*
Soient f une fonction définie sur un ensemble D et $I \subset D$.

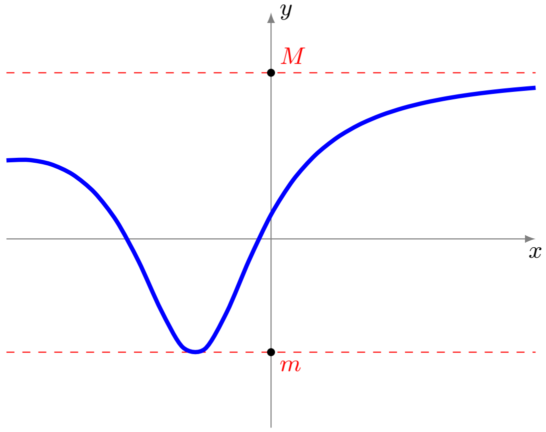
(i) *f est* constante *sur I*
lorsqu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = C$.

(ii) *f est* majorée *sur I*
lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$.
On définit de manière similaire une fonction minorée.

(iii) *f est* bornée *sur I*
lorsqu'elle est majorée et minorée.

(iv) *f est* positive *sur I*
lorsqu'elle est minorée par 0, c.à.d. pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$.
On définit de manière similaire une fonction négative *sur I.*

Remarque. La courbe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M) est située entre deux droites d'équations $y = m$ et $y = M$.



Proposition 2.4.
Soient f une fonction définie sur un ensemble D, f est bornée *sur $I \subset D$ si, et seulement si $|f|$ est majorée sur I autrement dit :*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in I, \ \ |f(x)| \leqslant K.$$

Définitions 2.2. *(Monotonie.)*
Soient f une fonction définie sur un ensemble D et $I \subset D$.

(*i*) *f est* croissante *sur I (resp. strictement croissante) lorsque pour tout $x, x' \in I$ on a :*

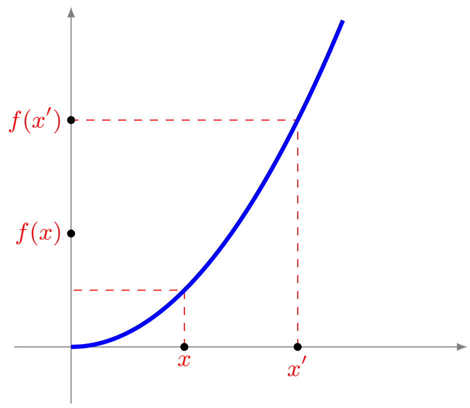
$$x \leqslant x' \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x') \ \ (\text{resp.} \ \ x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')).$$

On définit de manière similaire une fonction décroissante.

(*ii*) *f est* monotone *(resp. strictement monotone) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

En résumé une fonction croissante conserve l'ordre et une fonction décroissante change l'ordre.

Remarque. (Graphe d'une fonction croissante)



Exemple 2.3.

— *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ *est strictement croissante.*

— *La fonction valeur absolue* $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *est strictement croissante.*

2.4 Opérations sur les fonctions

Définitions 2.3. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un même domaine D de $\mathbb{R}$.*
On peut alors définir les fonctions suivantes :

(*i*) *la* somme *de f et g est la fonction $f+g : D \to \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout $x \in D$;*

(*ii*) *le* produit *de f et g est la fonction $f \times g : D \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in D$;*

(*iii*) *l'*inverse *de f (si f ne s'annule pas sur D) est la fonction $\frac{1}{f} : D \to \mathbb{R}$ définie par la relation $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in D$;*

(*iv*) *la* multiplication par un scalaire *$\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : D \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in D$.*

Proposition 2.5.
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un même domaine D de $\mathbb{R}$

(*i*) *Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes), alors $f+g$ est croissante (resp. décroissante).*

(*ii*) *Si f et g ont la même monotonie et positives, alors $f \times g$ est de même monotonie.*

(*iii*) *Si f est croissante (resp. décroissante) et strictement positive, alors $\frac{1}{f}$ est décroissante (resp. croissante).*

(*iv*) *Si f est croissante et $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), alors (λf) est décroissante (resp. décroissante).*

Définition 2.4. *(Composée)*
Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$.
On appelle fonction composée de f par g, *et on note $g \circ f$, la fonction définie par :*

$$\forall x \in D_f, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Proposition 2.6.
Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$

(*i*) *Si f et g ont la même monotonie , alors $g \circ f$ est croissante sur D_f.*

(*ii*) *Si f et g ont des monotonies contraires , alors $g \circ f$ est décroissante sur D_f.*

2.5 Parité, imparité, périodicité.

Soient f une fonction définie sur un ensemble D.

Définitions 2.4. *(Fonctions paires, impaires.)*

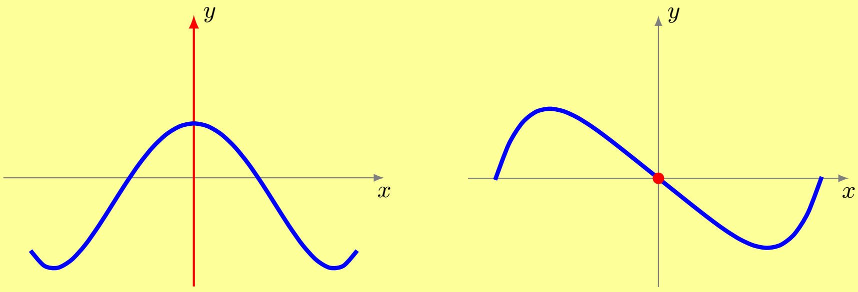
— *On dit que f est **paire** lorsque :*
  - $\hookrightarrow$ *D est symétrique par rapport à 0.*
  - $\hookrightarrow$ *pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.*

— *On dit que f est **impaire** lorsque :*
  - $\hookrightarrow$ *D est symétrique par rapport à 0.*
  - $\hookrightarrow$ *pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.*

Proposition 2.7. *(Interprétation graphique)*

(*i*) *f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées .*

(*ii*) *f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.*

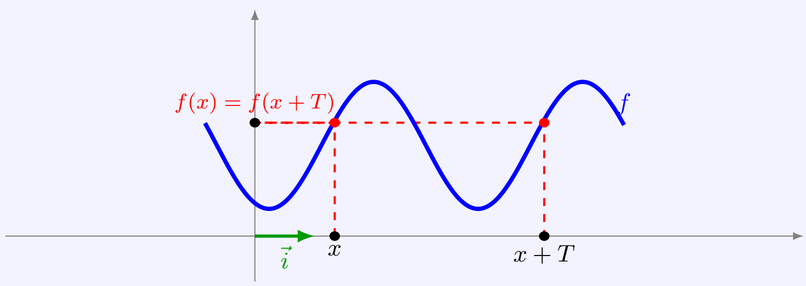


Exemples 2.4.

1. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est paire.*
2. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin x$ est impaire.*
3. *La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire.*

Définition 2.5. *(Périodicité.)*

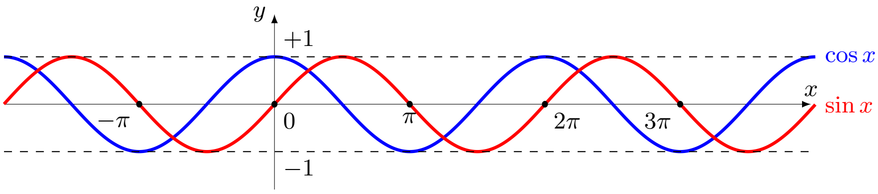
Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est une fonction T-périodique *lorsque :*
- $\hookrightarrow$ *pour tout $x \in D$, $x + T \in I$.*
- $\hookrightarrow$ *pour tout $x \in D$, $f(x + T) = f(x)$.*



Proposition 2.8. *Interprétation graphique*

La fonction f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 2.5. *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.*



2.6 Bijections

2.6.1 Rappels : injection, surjection, bijection

Définitions 2.5. *(injection, surjection, bijection)*
Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

(i) *f est* injective *si :*

$$\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x';$$

(ii) *f est* surjective *si :*

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x);$$

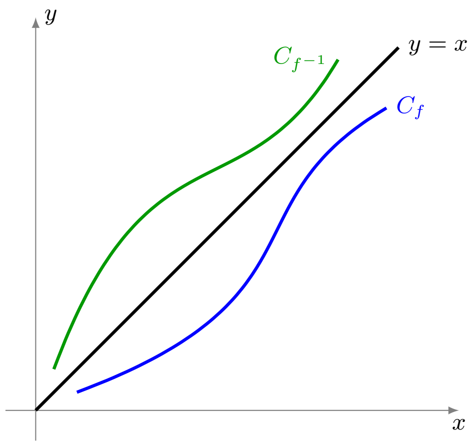
(iii) *f est* bijective *si : f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si*

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x).$$

Proposition 2.9.
Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. La fonction g est la bijection réciproque *de f et se note f^{-1}.*

Remarques.

1. *L'application* identité, *$Id_E : E \to E$ est définie par $x \mapsto x$.*
2. *Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*



Proposition 2.10. *(Fonctions monotones et injections)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.