TD 15 : Géométrie du plan

Dans tous les exercices, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Exercice 1

1/ Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

a) Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $||\overrightarrow{u}||$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$.

b) Déterminer l'image de $\overrightarrow{u}$ par la rotation vectorielle d'angle $\pi/3$.

c) Déterminer l'image de $\overrightarrow{u}$ puis de $\overrightarrow{v}$ par la symétrie vectorielle d'axe la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $x + y = 0$.

2/ Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\alpha\\\alpha+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha-2\end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

3/ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs normés et orthogonaux.

On pose $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Calculer $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$ et $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$

Exercice 2

1/ Déterminer des coordonnées polaires du point M de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3} - 2, 3 - 2\sqrt{3})$.

2/ Déterminer des coordonnées cartésiennes du point M de coordonnées polaires $\left[r = -2, \theta = \frac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 3

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4/5\\3/5\end{pmatrix}$. On note $\mathcal{D}$ la droite dirigée par $\overrightarrow{v}$ et passant par le point $A(1, -2)$.

1/ Justifier que $\mathcal{R}' = (O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormé direct du plan.

2/ Calculer les coordonnées de A dans le repère $\mathcal{R}'$.

3/ Calculer les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ du projeté orthogonal O' de O sur $\mathcal{D}$.

Exercice 4

Déterminer pour chacune des droites suivantes : un point, un vecteur directeur, un vecteur normal, une équation cartésienne, un système d'équations paramétriques.

1/ $\mathcal{D}$ passant par $A(2, 3)$ et $B(-1, 4)$.

2/ $\mathcal{D}$ passant par $A(2, 1)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$.

3/ $\mathcal{D}$ passant par $A(2, 1)$ et orthogonale à l'axe des ordonnées.

4/ $\mathcal{D} : 3x + 5y - 2 = 0$.

5/ $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$.

6/ $\mathcal{D}$ passant par $A(2;3)$ et orthogonale à $\mathcal{D}'$: $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 2-t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$

Exercice 5

Soient $A(2,1), B(-1,2), C(1,4)$ et $M(3,4)$.

1/ Calculer l'aire du triangle ABC.

2/ Calculer par deux méthodes la distance de M à la droite (AB), puis former une équation de la perpendiculaire à (AB) passant par M.

3/ Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

4/ Exprimer pour tout point $M(x,y)$ les coordonnées de son projeté orthogonal $M'(x',y')$ sur (AB) et de son symétrique $M''(x'',y'')$ par rapport à (AB).

5/ Déterminer l'image du triangle ABC par la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$.

6/ Déterminer l'image du triangle ABC par la symétrie vectorielle par rapport à la droite d'équation $x+\sqrt{3}y=0$.

Exercice 6

Déterminer la distance du point M à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1/ $(D) : 3x+5y-2=0$ et $M(1,2)$.

2/ $(D) : \begin{cases} x = 5-s \\ y = 2+3s \end{cases} \quad s \in \mathbf{R}$ et $M(-1,-3)$.

3/ $M(1,2)$ et (D) passe par $A(0,1)$ et $B(3,-1)$.

Exercice 7

Déterminer si les droites suivantes sont confondues, parallèles (et dans ce cas on donnera un vecteur directeur) ou sécantes (et dans ce cas on donnera le point d'intersection).

1/ $D_1 : 3x+5y-2=0$ et $D_2 : x-2y+3=0$.

2/ $D_3 : \begin{cases} x = 3+4t \\ y = 2-t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$ et $D_4 : \begin{cases} x = 5-t \\ y = 2+3t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$

3/ $D_5 : x-2y+3=0$ et $D_6 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$

Exercice 8

Soient les points $A(1,3)$ et $B(2,1)$:

1/ Déterminer le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$.

2/ Déterminer le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre A et de rayon 2.

3/ Déterminer l'intersection de ces deux cercles.

4/ Déterminer l'image du cercle $\mathcal{C}_1$ par la rotation vectorielle d'angle π.

5/ Déterminer l'image du du cercle $\mathcal{C}_2$ par la symétrie vectorielle par rapport à la droite d'équation $x-y=0$.

Exercice 9

Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2+2x=0$.

1/ Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.

2/ Déterminer les tangentes menées par $A(2,3)$ au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 10

Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2-x+4y-2=0$.

1/ Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.

2/ Discuter selon le paramètre réel m la position de la droite d'équation $mx-2y+3=0$ par rapport à $\mathcal{C}$.

Exercice 11

Soit ABC un triangle tel que $AB=2, AC=3$ et $\widehat{ACB}=30°$. Déterminer la valeur exacte de BC.

Exercice 12

On considère un triangle ABC tel que $BC=4, \widehat{ABC}=\pi/4$ et $\widehat{ACB}=\pi/3$. Calculer les longueurs AB et AC, ainsi que l'aire du triangle ABC.

Indication : On pourra remarquer que $\widehat{BAC}=\pi/2-\pi/12$ *et utiliser la formule :* $\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$.

Exercice 13

Soit ABC un triangle non aplati. On note $a=BC, b=CA, c=AB$, $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, S l'aire du triangle ABC.

1/ Montrer que : $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$.

2/ Montrer que : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*formule de Héron*).

3/ Montrer que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}}=\dfrac{b}{\sin\widehat{B}}=\dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$ (*Loi des sinus*) .

Exercice 14

Une droite d coupe un cercle $\mathcal{C}(\Omega,R)$ en deux points A et B.

1/ Soit $M\in d$, montrer que $\overline{MA}\times\overline{MB}=\Omega M^2-R^2$.

On note $C(M)=\Omega M^2-R^2$ appelé **puissance du point M par rapport au cercle**.

2/ Soit $\mathcal{C}: x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, montrer que pour $M(x,y)$ du plan : $C(M)=x^2+y^2-2ax-2by+c$.