Table des matières

Chapitre 22

Espaces vectoriels de dimensions finies

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Dimension d'un espace vectoriel

1.1 Dimension finie

Définition 1.1 (Espace vectoriel de dimension finie)**.**
*On dit qu'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est de **dimension finie** si E admet une famille génératrice finie .*

Exemple 1.1.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$:

1. *Les $\mathbf{K}$-espaces vectoriels $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}_n[X]$ sont de dimensions finies.*
2. *Les $\mathbf{K}$-espaces vectoriels $\mathbf{K}[X]$ et $\mathbf{K}^I$ (où I est un intervalle) ne sont pas de dimensions finies.*

Théorème 1.1 (Théorème de la base extraite)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors, on peut extraire de $\mathcal{G}$ une famille libre et génératrice de E. Autrement dit, il existe une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{B}$ soit une base de E.

Exemple 1.2. *Soit $\mathbf{R}[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes réels et E le sous-espace de $\mathbf{R}[X]$ engendré par la famille $\mathcal{G} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ définie par :*

$$P_1(X) = 1 \qquad P_2(X) = X \qquad P_3(X) = X + 1 \qquad P_4(X) = 1 + X^3 \qquad P_5(X) = X - X^3$$

Partons de $\mathcal{L} = \varnothing$ et cherchons $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{F}$ soit une base de E.

Théorème 1.2 (Existence d'une base)**.**
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors E admet au moins une base finie.

Proposition 1.1 (Cardinal d'une famille génératrice).
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E, alors toute famille de vecteurs de E de cardinal supérieur à $\operatorname{card}(\mathcal{G})$ est une famille liée.

Nous allons pouvoir parler de **la** dimension d'un espace vectoriel grâce au théorème suivant :

Théorème-Définition 1.1 (Théorème de la dimension).
*Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, toutes les bases de E ont le même cardinal appelé **dimension** de E et noté $\dim_{\mathbf{K}}(E)$.*

Remarques.

— *Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on note $\dim(E)$ la dimension de E.*

— *Par convention, $\dim(\{0_E\}) = 0$.*

Méthodologie. Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit de trouver une base de E, c'est-à-dire une famille à la fois libre et génératrice. Le précédent résultat nous assure que le cardinal (nombre d'éléments) de cette famille donne la dimension de E. Le théorème 1.1 de la dimension prouve que même si on choisissait une base différente alors ces deux bases auraient le même nombre d'éléments.

Exemple 1.3.
$\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}) = 1$ *et* $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$.

1.2 Exemples fondamentaux

Théorème 1.3 (Exemples fondamentaux).
Soit $n, p \in \mathbf{N}^*$.

(i) *Si $n \in \mathbf{N}^*$, $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^n) = n$.*
(ii) $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}_n[X]) = n + 1$.
(iii) $\dim_{\mathbf{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})) = n \times p$.

Remarques.

— *Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle**, une droite vectorielle est engendrée par n'importe lequel de ses vecteurs (non nul).*

— *Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel**.*

1.3 Théorème de la base incomplète

Lorsqu'un espace vectoriel est de dimension finie, le fait de connaître sa dimension est une information très riche ; les propriétés suivantes montrent comment exploiter cette information.

Théorème 1.4 (Théorème de la base incomplète).
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors, toute famille $\mathcal{L}$ libre de E peut être complétée de vecteurs de $\mathcal{G}$ en une base de E. Autrement dit, il existe une famille $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_1$ soit une base de E.

Proposition 1.2 (Comparaison des cardinaux).
Soient E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors $\operatorname{Card} \mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{G}$.

Cette proposition entraîne le résultat fondamental suivant :
Il reste à énoncer un résultat important et très utile :

Proposition 1.3 (CNS pour une base)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B}$ une famille de n vecteurs de E. Il y a équivalence entre :
(i) $\mathcal{B}$ est une base de E,
(ii) $\mathcal{B}$ est une famille libre de E,
(iii) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

La preuve sera une conséquence du théorème 1.1 de la dimension et du théorème 1.4 de la base incomplète.

Autrement dit, lorsque le nombre de vecteurs considéré est exactement égal à la dimension de l'espace vectoriel, l'une des deux conditions – être libre ou bien génératrice – suffit pour que ces vecteurs déterminent une base de E.

Exemple 1.4. *Pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$ les vecteurs (v_1, v_2, v_3) suivants forment une base de $\mathbf{R}^3$?*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Exercices d'application. *Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse par un résultat du cours ou un contre-exemple :*

1. *Une famille de $p \geq n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est génératrice.*
2. *Une famille de $p > n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est liée.*
3. *Une famille de $p < n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est libre.*
4. *Une famille génératrice de $p \leq n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est libre.*
5. *Une famille de $p \neq n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n n'est pas une base.*
6. *Toute famille libre à p éléments d'un espace vectoriel de dimension n se complète par une famille ayant exactement $n - p$ éléments en une base de E.*
7. *Trouver toutes les façons d'obtenir une base de $\mathbf{R}^2$ avec les vecteurs suivants : $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_5 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$.*
8. *Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ des vecteurs $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel d'équation $2x - y + z = 0$ de $\mathbf{R}^3$. En extraire une base.*
9. *Déterminer une base du sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + 3y - 2z = 0$. Compléter cette base en une base de $\mathbf{R}^3$. Idem avec E_2 vérifiant les deux équations $x + 3y - 2z = 0$ et $y = z$.*
10. *Donner une base de l'espace vectoriel des matrices 3×3 ayant une diagonale nulle. Idem avec l'espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbf{R}_n[X]$ vérifiant $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$.*

2 Dimension des sous-espaces vectoriels

On sait qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est lui même un espace vectoriel, la question est de savoir s'il est de dimension finie ou non, puis le lien entre leurs dimensions respectives.

2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 2.1 (Dimension de sev)**.**
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ *;*

Remarque. Dans un ev de dimension n, on appelle **hyperplan** tout sev de dimension $n-1$.

Exemple 2.1. *Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 2, les sous-espaces vectoriels de E sont :*

- *soit de dimension 0 : c'est alors le sous-espace $\{0\}$;*
- *soit de dimension 1 : ce sont les droites vectorielles, c'est-à-dire les sous-espaces $\mathbf{K}u = \mathrm{Vect}\,(\{\}\,u\}$ engendrés par les vecteurs non nuls u de E ;*
- *soit de dimension 2 : c'est alors l'espace E tout entier.*

Le théorème 2.1 précédent permet de déduire le corollaire suivant :

Corollaire (Égalité de sev)**.**
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$F = G \iff \dim F = \dim G.$$

Autrement dit, sachant qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux, il suffit de montrer l'égalité des dimensions.

Exemples 2.2.

- *Deux droites vectorielles F et G sont soit égales, soit d'intersection réduite au vecteur nul.*
- *Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ suivants :*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0 \right\} \quad \textit{et} \quad G = \mathrm{Vect}\,((\,)\,u, v) \quad \textit{où } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ et } v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que $F = G$?
- *Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$ et $G = Vect(3,3,1), (-1,1,1)$, montrer que $F = G$.*

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.1 (rang d'une famille de vecteurs)**.**
*Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$*, on le note* $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$*.*

Proposition 2.1 (rang et famille libre)**.**
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E.

(i) $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ *est le plus grand cardinal des sous-familles libres de $\mathcal{F}$;*
(ii) $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si, $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{card}(\mathcal{F})$*.*

Exemple 2.3. *Dans le $\mathbf{R}$-ev , soient $V_1 = (1,2,3), V_2 = (2,0,-1), V_3 = (2,4,6), V_4 = (3,2,2)$. Déterminer le* $\mathrm{rg}(V_1, \ldots, V_4)$*.*

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels de dimensions finies

Proposition 2.2 (Dimension d'un supplémentaire).
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Alors :

(i) F admet au moins un supplémentaire dans E ;
(ii) tout supplémentaire de F dans E est de dimension $n-p$.

Remarque. si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de G, alors $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de $F \oplus G$. Une telle base est dite **base adaptée** à $F \oplus G$.

Théorème 2.2 (Formule de Grassmann).
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Remarque. si $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple 2.4. *Dans un espace vectoriel E de dimension 6, on considère deux sous-espaces F et G avec $\dim F = 3$ et $\dim G = 4$. Que peut-on dire de $F \cap G$? de $F+G$? Peut-on avoir $F \oplus G = E$?*

Proposition 2.3 (Relation entre somme directe et dimensions).
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$.
(ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
(iii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exercices d'application.

1. *soient $\mathcal{D}$ une droite vectorielle et $\mathcal{P}$ un plan vectoriel de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs de l'espace tels que $\mathcal{D} \not\subseteq \mathcal{P}$, montrer que $\mathcal{V} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.*
2. *Soient $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-7\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\5\\11\end{pmatrix}\right)$. Montrer que $F = G$.*
3. *Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Calculer les dimensions de $F, G, F \cap G, F+G$ en fonction de $t \in \mathbf{R}$.*
4. *Dans un espace vectoriel de dimension 7, on considère des sous-espaces F et G vérifiant $\dim F = 3$ et $\dim G \leq 2$. Que peut-on dire pour $\dim(F \cap G)$? Et pour $\dim(F+G)$?*
5. *Dans un espace vectoriel E de dimension finie, montrer l'équivalence entre : (i) $F \oplus G = E$; (ii) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$; (iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.*
6. *Soit H un hyperplan dans un espace vectoriel de dimension finie E. Soit $v \in E \setminus H$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}\,(()\,v)$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E.*