Table des matières

Chapitre 8

Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

1.1 Généralités

Définitions 1.1 (Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre).

(i) *L'équation différentielle :*

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (\mathcal{E})$$

*où a et b sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{K}$, est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre**.*

(ii) *On appelle **solution** de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ toute fonction f de $\mathbf{K}^I$ dérivable sur I telle que :*

$$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

Remarques.

1. *Si le cas suivant $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ se présente, on se place sur un intervalle I tel que $\alpha(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. La division par α permet de retrouver la **forme résolue** $y' + a(x)y = b(x)$*
2. *On notera $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.*
3. *Le cas particulier $c = 0$, $(\mathcal{H})\ : y' + a(x)y = 0$, est appelée **équation homogène**.*

Dans la suite on supposera que a et b sont des fonctions continues sur I.

1.2 Structure des solutions

Théorème 1.1 (Forme générale d'une solution de $(\mathcal{H})$).
Soit l'équation homogène $(\mathcal{H})\ : y' + a(x)y = 0$ et I un intervalle où la fonction a ne s'annule pas, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{ f : I \to \mathbf{K}, f(x) = C\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \ \text{avec} \ C \in \mathbf{K} \right\}.$$

Exemples 1.1. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' + y = 0$; *2.* $y' + xy = 0$; *3.* $(x-1)y' + xy = 0$.

Théorème 1.2 (Forme générale d'une solution de $(\mathcal{E})$).
La solution générale de l'équation différentielle linéaire $(\mathcal{E})$: $y' + a(x)y = b(x)$ *est la somme d'une solution particulière de* $(\mathcal{E})$ *et de la solution générale de* $(\mathcal{H})$.

1.3 Recherche de solutions particulières de $(\mathcal{E})$: $y' + a(x)y = b(x)$

1.3.1 Solution particulière évidente

Dans certains cas, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ admet une solution particulière simple à trouver, par exemple une fonction constante ou une autre forme particulière.

Exemples 1.2. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' - y = 1$; *2.* $y' - y = 2x - x^2$; *3.* $(x-1)y' + xy = x^2 - 1$.

1.3.2 Méthode de la variation de la constante

Lorsqu'il n'apparaît aucune solution évidente, on dispose d'une méthode systématique pour trouver une solution particulière.
Soit h une solution de l'équation homogène associée. On cherche une solution de $(\mathcal{E})$ sous la forme $f = z \times h$ où z est une fonction dérivable sur I.
La dérivée de f donne, $f' = z' \times h + z \times h'$ et en remplaçant cette expression dans $(\mathcal{E})$ et en tenant compte que h est solution de $(\mathcal{E})$, on obtient :

$$(z'h + zh') + a(zh) = b \iff z'h = b \iff z = \int \frac{b}{h}.$$

Exemples 1.3. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' = 3y + (3x^2 + 1)\,\mathrm{e}^{2x}$; *2.* $(x-1)y' + xy = \sin x$.

1.3.3 Superposition des solutions :

Proposition 1.1 (Superposition des solutions).
Lorsque $b(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$, *on cherche une solution particulière* f_k *de* $y' + a(x)y = b_k(x)$, *une solution particulière de* $(\mathcal{E})$ *est alors* $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Exemple 1.4. *Résoudre l'équation* $y' - y = 1 - x^2 + \mathrm{e}^{4x}$.

1.4 Problème de Cauchy

Proposition 1.2 (Existence et unicité de la solution).
Soit $y' + a(x)y = b(x)$ *une équation différentielle linéaire du premier ordre, où* $a, b : I \to \mathbf{K}$ *sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert* I. *Alors, pour tout* $x_0 \in I$ *et pour tout* $y_0 \in \mathbf{K}$, ***il existe une et une seule solution*** y *telle que* $y(x_0) = y_0$.

Exemple 1.5. *Résoudre l'équation $y' = 3y + 3$ avec la condition $y(0) = 2$.*

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle du type $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$

1. On se place sur un intervalle I où α ne s'annule pas, et on divise par $\alpha(x)$ pour se ramener à une équation $(\mathcal{E})$ de la forme $y' + a(x)y = b(x)$.
2. On résout l'équation homogène associée, dont la solution générale est :
$$y_0 : x \mapsto C\,\mathrm{e}^A \text{ avec } A = -\int a(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. On cherche une solution particulière y_P évidente si cela est possible (cas où les coefficients sont constants) sinon on cherche y_P par la méthode de variation de la constante.
4. La solution générale de $(\mathcal{E})$ est la somme $y_0 + y_p$.
5. On cherche la solution unique de $(\mathcal{E})$ si une condition initiale est donnée.

2 Équations différentielles linéaires scalaires du 2^{nd} ordre

2.1 Généralités

Définitions 2.1 (Équations différentielles linéaires du 2^{nd} ordre)**.**

(*i*) *L'équation différentielle :*
$$y'' + ay' + by = c(x) \quad (\mathcal{E})$$
*où $a, b \in \mathbf{K}$ et c est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{K}$, est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**.*

(*ii*) *On appelle **solution** de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ toute fonction f de $\mathbf{K}^I$ deux fois dérivable sur I telle que :*
$$\forall x \in I,\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x).$$

Remarques.

1. *On notera $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.*
2. *Le cas particulier $c = 0$, $(\mathcal{H})$: $y'' + ay' + by = 0$, est appelée **équation homogène**.*

2.2 Structure des solutions

Théorème 2.1 (Forme générale d'une solution de $(\mathcal{E})$)**.**
*La solution générale de l'équation différentielle linéaire $(\mathcal{E})$: $y'' + ay' + by = c(x)$ **est la somme** d'une solution particulière de $(\mathcal{E})$ et de la solution générale de $(\mathcal{H})$.*

Définition 2.1 (Équation caractéristique)**.**
*L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de $(\mathcal{H})$.*

Théorème 2.2 (Résolution de $(\mathcal{H})$ dans $\mathbb{C}$).
Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

(i) *Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes* r *et* s *alors :*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, f(x)=A\,\mathrm{e}^{rx}+B\,\mathrm{e}^{sx},\,(A,B)\in\mathbb{C}^2\right\};$$

(ii) *si l'équation caractéristique admet une solution double* r *alors :*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, f(x)=(Ax+B)\,\mathrm{e}^{rx},\,(A,B)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

Exemple 2.1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $y''-y'+(1+\mathrm{i})y=0$.

Théorème 2.3 (Résolution de $(\mathcal{H})$ dans $\mathbb{R}$).
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

(i) *Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes* r *et* s *alors :*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=A\,\mathrm{e}^{rx}+B\,\mathrm{e}^{sx},\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\};$$

(ii) *si l'équation caractéristique admet une solution double* r *alors :*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(Ax+B)\,\mathrm{e}^{rx},\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\};$$

(iii) *si l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle, alors elle possède deux solutions dans* $\mathbb{C}$ *:* $r=a+\mathrm{i}b$ *et* $s=\overline{r}=a-\mathrm{i}b$ *et on a :*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(A\cos(bx)+B\sin(bx))\,\mathrm{e}^{ax},\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Exemples 2.2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*
$y''+4y'+3y=0$, $y''+y'+y=0$ *et* $y''+2y'+y=0$.

2.3 Recherche de solutions particulières de $(\mathcal{E})$: $y''+ay'+by=c(x)$

2.3.1 Étude du cas : $c(x)=P(x)$ où P est un polynôme de degré n

Proposition 2.1 (Cas d'un polynôme de degré n).
Soit $(\mathcal{E})$: $y''+ay'+by=P$ *avec* P *polynôme de degré* n,

(i) *si* $b\neq 0$, $(\mathcal{E})$ *admet une solution particulière qui est un polynôme de degré* n *;*
(ii) *si* $b=0$ *et* $a\neq 0$, $(\mathcal{E})$ *admet une solution particulière qui est un polynôme de degré* $n+1$ *;*
(iii) *si* $b=a=0$, $(\mathcal{E})$ *admet une solution particulière qui est un polynôme de degré* $n+2$.

Exemples 2.3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*
$y''+y'-2y=2x^2-3x+1$, $y''+2y'=3x^2$ *et* $y''=x^2+x$.

2.3.2 Étude du cas : $c(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ où P est un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{C}$

Proposition 2.2 (Cas où $c(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$)**.**
Soit $(\mathcal{E})\ :\ y'' + ay' + by = P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ *avec* P *polynôme de degré* n *et* $m \in \mathbb{C}$.

- (i) *si* m *n'est pas solution de l'équation caractéristique,* $(\mathcal{E})$ *admet une solution particulière de la forme :*

$$f(x) = \mathrm{e}^{mx} \times Q(x) \text{ avec } Q \text{ un polynôme de degré } n;$$

- (ii) *si* m *est une racine simple de de l'équation caractéristique,* $(\mathcal{E})$ *admet une solution particulière de la forme :*

$$f(x) = \mathrm{e}^{mx} \times Q(x) \text{ avec } Q \text{ un polynôme de degré } n+1;$$

- (iii) *si* m *est une racine double de de l'équation caractéristique,* $(\mathcal{E})$ *admet une solution particulière de la forme :*

$$f(x) = \mathrm{e}^{mx} \times Q(x) \text{ avec } Q \text{ un polynôme de degré } n+2.$$

Remarque. On peut aussi poser $y = ze^{mx}$ et se ramener à la proposition (2.1).

Proposition 2.3 (Cas où $c(x) = A\cos(mx)$ ou $c(x) = A\sin(mx)$)**.**
Soit $(\mathcal{E})\ :\ y'' + ay' + by = A\cos(mx)$ *(resp* $y'' + ay' + by = A\sin(mx)$*) avec* $A \in \mathbb{R}$ *et* $m \in \mathbb{R}$.

- (i) *si* $(\mathrm{i} \times m)$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique,* $(\mathcal{E})$ *admet une solution particulière de la forme :*

$$f(x) = C_1\cos(mx) + C_2\sin(mx) \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2;$$

- (ii) *si* $(\mathrm{i} \times m)$ *est une racine de l'équation caractéristique,* $(\mathcal{E})$ *admet une solution particulière de la forme :*

$$f(x) = (C_1x + D_1)\cos(mx) + (C_2x + D_2)\sin(mx) \text{ avec } (C_1, C_2, D_1, D_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Exemples 2.4. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*
$y'' + y = x\,\mathrm{e}^x$, $y'' + y = \cos x$ *et* $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

2.4 Problème de Cauchy

Proposition 2.4 (Existence et unicité de la solution)**.**
Soient $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbf{K}$ *et* $z_0 \in \mathbf{K}$ *donnés, l'équation* $(\mathcal{E}) : y'' + ay' + by = c(x)$ ***admet une unique solution*** f *vérifiant* $f(x_0) = y_0$ *et* $f'(x_0) = z_0$.

Exemple 2.5. *Résoudre l'équation* $y'' + 9y = x^2 + 1$ *avec condition* $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du type $y'' + ay' + by = c(x)$

1. On résout l'équation homogène associée, dont la solution générale dépend de la résolution de son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ dans $\mathbf{K}$.
2. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre avec l'une des méthodes vues dans ce chapitre
3. La solution général de $(\mathcal{E})$ est la somme $y_0 + y_p$.
4. On cherche la solution unique de $(\mathcal{E})$ si des conditions initiales sont données.