Table des matières

Chapitre 9

Entiers - Dénombrements

1 Ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$

1.1 Rudiments d'arithmétique dans $\mathbf{N}$

Propriétés 1.1 (Propriétés fondamentales de $\mathbf{N}$).

(*i*) *Toute partie non vide de* $\mathbf{N}$ *possède un plus petit élément.*
(*ii*) *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbf{N}$, *admet un plus grand élément.*
(*iii*) $\forall (a,b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, $\exists n \in \mathbf{N}, na > b$. *On dit que* $\mathbf{N}$ *est* ***archimédien****.*

Définition 1.1 (Divisibilité - Multiple).
Soient a, b *deux entiers naturels.*
On dit que a *est un* ***multiple*** *de* b *(ou que* b ***divise*** a*) lorsqu'il existe* $q \in \mathbf{N}$ *tel que :* $a = bq$. *On note alors* $b|a$

Théorème 1.1 (Division euclidienne).
Soient a, b *deux entiers naturels, avec* b ***non nul****.*
Il existe un ***unique*** *couple* $(q,r) \in \mathbf{N}^2$ *tel que :*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

q *est appelé le quotient et* r *le reste.*

Exemple 1.1.
$28 = 3 \times 8 + 4$ *ici* $q = 3$ *et* $r = 4$.

1.2 PGCD, PPCM

(On admet l'existence des nombres suivants.)

Définition 1.2 (PGCD).
Soient $a, b \in \mathbf{N}^*$.
On appelle ***plus grand commun diviseur*** *de* a *et* b*, et on note* $a \wedge b$*, le plus grand entier naturel qui divise* a ***et*** b.
On pose par convention pour tout $a \in \mathbf{N}$, $a \wedge 0 = a$.

Exemple 1.2.
$12 \wedge 28 = 4,\ 12 \wedge 24 = 12$ *et* $37 \wedge 25 = 1$.

Théorème 1.2 (Fondement de l'algorithme d'Euclide).
Soient $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}^*$ *et* r *le reste de la division euclidienne de* a *par* b.
Alors : a *et* b *ont les mêmes diviseurs que* b *et* r.
En particulier : $a \wedge b = b \wedge r$

Algorithme d'Euclide :
Soient $a, b \in \mathbf{N}$.

Tant que	$a\%b \neq 0$:
	$a, b \leftarrow b, a\%b$
Fin du Tant que	
Afficher (b)	

$a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans la suite des divisions euclidiennes successives de a par b.
$a\%b$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b

Exemple 1.3.
$12716 \wedge 418 = 22$ *par divisions successives.*

Définition 1.3 (PPCM).
Soient $a, b \in \mathbf{N}^*$.
On appelle ***plus petit commun multiple*** *de* a *et* b*, et on note* $a \vee b$*, le plus entier entier naturel non nul divisible par* a ***et*** b.

1.3 Nombres premiers, décomposition

Définition 1.4. *(Nombre premier.)*
On appelle ***nombre premier*** *tout entier naturel* $p \geqslant 2$ *qui n'est divisible que par 1 et lui-même.*

Crible d'Eratosthène :

2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$
$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17
$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cdots$

Remarque. Il existe une infinité de nombres premiers.

Théorème 1.3 (Décomposition en produit de facteurs).
Soit $n \geq 2$ un entier. Il existe des nombres premiers $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ et des exposants entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \geqslant 1$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}.$$

De plus les p_i et les α_i $(i = 1, \ldots, r)$ sont uniques.

Exemple 1.4.

1. *Décomposer* 48 *et* 102 *en produit de facteurs premiers.*
2. *En déduire* $48 \wedge 102$ *et* $48 \vee 102$.

Remarque. Par convention 1 n'est pas un nombre premier, car dans le cas contraire il n'y aurait plus unicité de la décomposition : $60 = 2^2 \times 3 \times 5 = 1 \times 2^2 \times 3 \times 5 = 1^2 \times 2^2 \times 3 \times 5 = \cdots$

Proposition 1.1 (PGCD et PPCM).
Soient $a, b \in \mathbf{N}^*$, alors $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$

2 Ensembles finis

L'ensemble des résultats de ce paragraphe sont admis.

2.1 Un peu de théorie . . .

On notera, pour $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ avec $m \leqslant n$, $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, \ldots, n\}$

Définitions 2.1 (Ensemble fini).

(*i*) *Soit E un ensemble.*
Lorsqu'il existe un entier p et une bijection de E sur $[\![1, p]\!]$,on dit alors que E est un ***ensemble fini*** *et que p est le* ***cardinal*** *de E, noté $p = \mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.*

(*ii*) *Par convention l'ensemble vide $\varnothing$ sera un ensemble fini de cardinal 0.*

(*iii*) *Lorsque E n'est pas fini, il est dit infini.*

Proposition 2.1 (Partie d'un ensemble fini).
Soit E un ensemble fini et F une partie de E.
- *Alors F est fini et $Card(F) \leqslant Card(E)$.*
- *De plus : $Card(F) = Card(E) \Longleftrightarrow F = E$.*

Proposition 2.2 (Injection, surjection, bijection sur des ensembles finis).
Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.

(*i*) *Si f est injective alors $\mathrm{Card}\, E \leq \mathrm{Card}\, F$.*

(*ii*) *Si f est surjective alors $\mathrm{Card}\, E \geq \mathrm{Card}\, F$.*

(*iii*) *Si f est bijective alors $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$.*

Proposition 2.3 (Équivalence)**.**
Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.
Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$*, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *f est injective,*
(*ii*) *f est surjective,*
(*iii*) *f est bijective.*

Remarque. **principe des tiroirs** :
Si l'on range dans k tiroirs, $n > k$ paires de chaussettes alors il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) deux paires de chaussettes.
Ou encore, dans une équipe de rugby de 15 joueurs, il y a au moins deux joueurs nés le même mois !

2.2 Propriétés des cardinaux

Théorème 2.1 (Cardinal d'une réunion ou d'une intersection)**.**
Soient A et B deux ensembles finis.

(*i*) *$A \cup B$ est fini et :*

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

En particulier si A et B sont disjoints :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$$

(*ii*) *On note $A \backslash B$ l'ensemble A privé des éléments de $A \cap B$.*

$$Card(A \backslash B) = Card(A) - Card(A \cap B)$$

En particulier si $B \subset A$:

$$Card(\overline{B}) = Card(A \backslash B) = Card(A) - Card(B)$$

Théorème 2.2 (Cardinal du complémentaire)**.**
Soient E un ensemble fini et A une partie de E.
Alors $\bar{A}$ est fini et :

$$Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$$

Théorème 2.3 (Produit cartésien d'ensembles finis)**.**
Soient E et F deux ensembles finis.
Alors $E \times F$ est fini et :

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

Théorème 2.4 (Nombre d'applications entre deux ensembles finis).
Soient E et F deux ensembles finis.
On note $n = Card(E)$ et $p = Card(F)$.
Alors l'ensemble des applications de E dans F que l'on note $\mathcal{F}(E,F)$ est fini et :

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}(E,F)) = p^n.$$

Autrement dit, c'est $(\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E}$.

Exemple 2.1. *En particulier le nombre d'applications de E dans lui-même est n^n. Par exemple si $E = \{a,b,c\}$ alors ce nombre est $3^3 = 27$.*

Proposition 2.4 (Nombre de parties d'un ensemble fini).
Soient E un ensemble fini. On note $n = Card(E)$.
Alors l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, est fini et :

$$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

3 Dénombrements

On note $F_n = [\![1,n]\!] = \{1,2,\cdots,n\}$ avec $n \in \mathbf{N}^*$.

3.1 Permutation, arrangement

Définition 3.1 (Permutation).
*On appelle **permutation** de F_n toute bijection de F_n dans F_n.*
On note s_n l'ensemble des permutation de F_n, on a $\mathrm{card}(s_n) = n!$.

Proposition 3.1 (Nombre des permutations).
L'ensemble des permutation de F_n est égal à $\mathrm{card}(s_n) = n!$.

Exemple 3.1. *Parmi les 27 applications de $\{a,b,c\}$ dans lui-même il y en a $3! = 6$ qui sont bijectives.*

Définition 3.2 (Arrangement).
*On appelle **arrangement** de p éléments de F_n tout p-**uplet** $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ (on dit aussi p-**liste**) d'éléments **distincts** de F_n.*
On note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments de F_n.

Proposition 3.2 (Nombre d'arrangements).
Le nombre d'arrangements de p éléments de F_n est égal à :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Proposition 3.3 (Injections et arrangements)**.**
Soit $E \subset F_n$ *avec* $\operatorname{Card} E = p \leqslant n$*, Le nombre d'injections de* E *dans* F_n *est égal au nombre d'arrangements de* p *éléments de* F_n*, soit :*

$$\mathrm{A}_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemples 3.2.

1. *Calculer le nombre de mots de 2 lettres distinctes choisies parmi* $\{a, b, c\}$.
2. *Quel est le nombre d'injections de* $\{1, 2\}$ *dans* $\{a, b, c\}$ *?*
3. *Une urne contient 3 boules* $\{a, b, c\}$*, on tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne, quel est le nombre de tirages différents ?*

3.2 Combinaison

Définition 3.3 (Combinaison)**.**
On appelle ***combinaison*** *de* p *éléments de* F_n *toutes parties* $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ *d'éléments* F_n*, leur nombre est noté* $\binom{n}{k}$.

Exemple 3.3. *Les parties à deux éléments de l'ensemble* $\{1, 2, 3\}$ *sont* $\{1, 2\}$*,* $\{1, 3\}$ *et* $\{2, 3\}$ *et donc* $\binom{3}{2} = 3$*. Si nous classons les parties de* $\{1, 2, 3\}$ *par nombre d'éléments, on a*

— $\binom{3}{0} = 1$ *(la seule partie n'ayant aucun élément est l'ensemble vide),*

— $\binom{3}{1} = 3$ *(il y a 3 singletons),*

— $\binom{3}{2} = 3$ *(il y a 3 paires),*

— $\binom{3}{3} = 1$ *(la seule partie ayant 3 éléments est l'ensemble tout entier).*

Par un raisonnement combinatoire, on retrouve les résultats suivants :

Proposition 3.4.

(i) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.

(ii) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad (0 < k < n)$

(iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Proposition 3.5. *Formule de* $\binom{n}{k}$
Pour tout entier naturel n *et* $k \in [\![0, n]\!]$ *:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Méthode

Tableau récapitulatif

	ordre	**modèle d'urne**	**Calcul**
Arrangement	*important*	*tirage successif sans remise*	$\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
Combinaison	*non important*	*tirage simultanné*	$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$