DM n° 3

Remis le 18 octobre à rendre le 8 novembre

Toutes les réponses seront justifiées. Une attention particulière est portée sur :
- *la qualité de la rédaction, le soin et la présentation;*
- *la clarté et la précision des raisonnements;*
- ***la recherche et la réflexion personnelle**.*

Pré-requis :
- savoir déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe ;
- savoir écrire un nombre complexe sous forme exponentielle ;
- savoir résoudre une équation du second degré.
- savoir déterminer les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe.

Exercice 1

Calculer et simplifier la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos((2k+3)x)$$

Exercice 2

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0, \text{ où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1.$$

a) Justifier la factorisation suivante de P_α :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)z + 1\right)\dots\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)z + 1\right).$$

b) Prouver, à l'aide des nombres complexes par exemple, la formule suivante :

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

c) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n}\right)\dots\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

2) Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$, et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

a) Montrer que, pour tout α non nul, on a :

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}.$$

b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$