Correction du DM n° 2

Exercice 1

1) 1a. l'assertion :

$$\forall x \in]-1,1],\ \exists y \in]-1,1],\ y < x$$

signifie que l'intervalle $]-1,1]$ n'est pas minoré, cette proposition est vraie. En effet, pour tout $x \in]-1,1]$, le réel $y = \dfrac{y-1}{2}$ vérifie $y \in]-1,1]$ et $y < x$.
La négation de l'assertion est :

$$\exists x \in]-1,1],\ \forall y \in]-1,1],\ y \geqslant x$$

qui signifie que $]-1,1]$ est minorée par x, cette assertion est bien entendu fausse.

1b. La proposition :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x < y) \implies (x+1 \leqslant y)$$

est vraie et elle signifie que si un entier naturel x est plus petit qu'un autre entier, alors le successeur de x est au plus égal à cet entier.
L'assertion devient fausse si l'on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$, il suffit de prendre $x = 1$ et $y = \dfrac{3}{2}$, on a $x < y$ mais $x+1 > y$.
La négation de l'assertion est :

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, (x < y) \text{ et } (x+1 > y)\,.$$

2) Exprimer les assertions suivantes en langage mathématique et les justifier :

2a. La fonction inverse n'est pas minorée sur $]-1;0[$ se traduit par :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in]-1,0[,\ f(x) < m.$$

En effet, il suffit de choisir $x \in \left]-\dfrac{1}{|m|}, 0\right[\cap]-1;0[$ et par comparaison on obtient $\dfrac{1}{x} < m$.

2b. La fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est π-périodique se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2(x+\pi)) = \sin(2x).$$

Exercice 2

1) 1a. Montrons que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \implies A \cap B = A \cap C$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in A \cap B \quad &\iff \quad x \in A \text{ et } x \in B \iff x \in A \text{ et } x \notin \overline{B} \iff x \in A \text{ et } x \notin A \cap \overline{B} \\
&\iff \quad x \in A \text{ et } x \notin A \cap \overline{C} \iff x \in A \text{ et } x \notin \overline{C} \iff x \in A \text{ et } x \in C \\
&\iff \quad x \in A \cap C.
\end{aligned}$$

On vient de prouver donc que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \implies A \cap B = A \cap C$.
Pour montrer la réciproque, il suffit de remplacer B par $\overline{B}$ et C par $\overline{C}$, d'où l'équivalence.

1b. $\begin{cases} A \setminus B = A \setminus C \\ B \setminus A = C \setminus A \end{cases} \iff \begin{cases} A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \\ B \cap \overline{A} = C \cap \overline{A} \end{cases}$.
D'après la question précédente, on en déduit de la première égalité que $A \cap B = A \cap C$.
D'autre part $B = (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$ et $C = (C \cap A) \cup \left(C \cap \overline{A}\right)$, d'où $B = C$.

1c. On a $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ et $\overline{A} \Delta \overline{B} = (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{B} \cap \overline{\overline{A}}) = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A)$ d'où l'égalité.

1d. On a $A \cap (B \setminus C) = A \cap \left(B \cap \overline{C}\right)$ et

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
&= \left((A \cap B) \cap \overline{A}\right) \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right) = \varnothing \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \\
&= A \cap \left(B \cap \overline{C}\right)
\end{aligned}$$

d'où $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

2) On considère l'application $f: \begin{array}{rcl} [1;+\infty[& \longrightarrow & [-2;+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2-2x-1 \end{array}$

2a. Soit $y \in [-2;+\infty[$, x est un antécédent de y par f si $f(x)=y$.

$$\begin{array}{rcl} \exists x \in \mathbb{R},\ f(x)=y & \Longleftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R},\ x^2-2x-1=y \\ & \Longleftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R},\ x^2-2x-(1+y)=0(*) \\ & \Longleftrightarrow & \Delta = 4(1+(1+y)^2) \geqslant 0 \end{array}$$

En conclusion, si $y \in [-2;+\infty[$, les racines de (*) sont $x_1 = 1+\sqrt{1+(1+y)^2}$ et $x_2 = 1-\sqrt{1+(1+y)^2}$. Comme $x_1 \in [1;+\infty[$ et $x_2 \notin [1;+\infty[$, alors x_1 est l'unique antécédent de y par f.

2b. Par définition, f est donc bijective, et $f^{-1}: \begin{array}{rcl} [-2;+\infty[& \longrightarrow & [1;+\infty[\\ x & \longmapsto & 1+\sqrt{1+(1+x)^2} \end{array}$

.

Exercice 3

1) Inéquation $(1.a)$: $\sqrt{x+2} \geqslant 1-x$

— Le domaine d'étude est $[-2;\ +\infty[$.

Attention à ne pas « passer au carré », la fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$!

— 1^er cas : $x \geqslant 1 \iff 1-x \leqslant 0$.
Comme $\sqrt{\ }$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ alors tout $x \geqslant 1$ est solution de $(1.a)$.
Ou encore : l'ensemble des solutions de ce cas est : $[1;\ +\infty[$.

— 2^ème cas : $x \leqslant 1 \iff x+1 \geqslant 0$.
Les deux membres de l'inéquation sont positifs donc, comme la fonction carré est bijective et croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{array}{rcl} (1.a) & \Longleftrightarrow & x+2 \geqslant (1-x)^2 \\ & \Longleftrightarrow & x^2-3x-1 \leqslant 0 \end{array}$$

On résout alors facilement l'inéquation et on obtient : $\left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right] \cap]-\infty;1] = \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};1\right]$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = [1;\ +\infty[\cup \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};1\right] = \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right[}$.

2) Inéquation $(1.b)$: $|1-x| \leqslant 2|x|-3$

— Domaine d'étude : $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$	$1-x$	0	$-1+x$
$\lvert x\rvert$	$-x$	0	x	x
$\lvert 1-x\rvert \leqslant 2\lvert x\rvert-3$	$1-x \leqslant -2x-3$	$1-x \leqslant 2x-3$		$-1+x \leqslant 2x-3$

— 1^er cas : $x \in]-\infty;\ 0]$

$$\begin{array}{rcl} (1.b) & \Longleftrightarrow & 1-x \leqslant -2x-3 \\ & \Longleftrightarrow & x \leqslant -4 \end{array}$$

En tenant compte du domaine d'étude de ce cas, l'ensemble des solutions est $]-\infty;-4]$.

— 2^ème cas : $x \in [0;\ 1]$

$$\begin{array}{rcl} (1.b) & \Longleftrightarrow & 1-x \leqslant 2x-3 \\ & \Longleftrightarrow & x \geqslant \dfrac{4}{3} \end{array}$$

On vérifie que ces solutions ne sont pas dans $[0;\ 1]$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est vide.

— 3^ème cas : $x \in [1;\ +\infty[$

$$\begin{array}{rcl} (1.b) & \Longleftrightarrow & -1+x \leqslant 2x-3 \\ & \Longleftrightarrow & x \geqslant 2 \end{array}$$

On vérifie que ces solutions sont dans $[1;\ +\infty[$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $[2;\ +\infty[$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty;-4] \cup [2;\ +\infty[}$.

3) Équation $(1.c)$: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1} = a$ $(a \in \mathbb{R})$

— Le domaine d'étude est $[0;\ +\infty[$.

— 1^er cas : $a \leqslant 0$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x+1} \geqslant 1$ donc $\sqrt{x}+\sqrt{x+1} \geqslant 1$. Comme $a \leqslant 0$, alors il n' y a pas de solutions dans ce cas.

— $2^{\text{ème}}$ cas : $a > 0$.
Les deux membres de l'équation sont positifs donc, comme la fonction carré est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}(1.c) \quad &\iff x+(x+1)+2\sqrt{x^2+x}=a^2\\ &\iff 2\sqrt{x^2+x}=a^2-2x-1\\ &\iff \sqrt{x^2+x}=\frac{a^2-1}{2}-x.\end{aligned}$$

- Si $a \in]0;1[$, $\dfrac{a^2-1}{2} < 0$ et donc $\dfrac{a^2-1}{2} - x < 0$. Par conséquent, il n' y a pas de solution dans ce cas.
- Si $a \in [1;+\infty[$, alors $\dfrac{a^2-1}{2} \geqslant 0$.

— Si $x \geqslant \dfrac{a^2-1}{2} \iff \dfrac{a^2-1}{2} - x < 0$. Il n' y a pas non plus de solution dans ce cas.

— Si $x \leqslant \dfrac{a^2-1}{2}$, alors $\dfrac{a^2-1}{2} - x \geqslant 0$ et dans ce cas par passage aux carrés, on obtient :

$$\begin{aligned}x^2+x=\left(\frac{a^2-1}{2}-x\right)^2 \quad &\iff \quad x^2+x=\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2+x^2-\left(a^2-1\right)x\\ &\iff \quad x=\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2\end{aligned}$$

. **Vérifions si cette solution est dans le segment** $\left[0;\dfrac{a^2-1}{2}\right]$.

$$\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 \in \left[0;\frac{a^2-1}{2}\right] \iff \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 \leqslant \frac{a^2-1}{2} \iff \frac{a^2-1}{2a^2} \leqslant 1 \iff a^2+1 \geqslant 0$$

ce qui est toujours vrai.

Ainsi, la seule solution de l'équation $(1.c)$ est $\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2$ si $a \geqslant 1$, autrement il n' y a pas de solution.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1a. $\sqrt{x+2} \geqslant 1-x$ **1b.** $|1-x| \leqslant 2|x|-3$ **1c.** $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=a \ (a \in \mathbb{R})$

2) Calculons

$$\begin{aligned}A &= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k-1}2^{k+n} \underset{[j=k-1]}{=} \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}2^{j+n+1}\\ &= 2^{n+1}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}2^j = 2^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j-\binom{n}{0}2^0-\binom{n}{n}2^n\right)\\ &= 2^{n+1}\left((2+1)^n-1-2^n\right)=2\times\left(6^n-4^n-2^n\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+1}2^k \underset{[j=k+1]}{=} \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}2^{j-1}\\ &= 2^{-1}\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}2^j = 2^{-1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}2^j-\binom{n+1}{0}2^0-\binom{n+1}{n+1}2^{n+1}\right)\\ &= 2^{-1}\left((2+1)^{n+1}-1-2^{n+1}\right)=\frac{3^{n+1}-1}{2}-2^n.\end{aligned}$$

Fin du corrigé